ФГОС

УМК

Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя **по геометрии**

К учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»

- *Методы решения задач*
- *Тематическое планирование*
- *Планы уроков*
- *Объяснение сложных тем*
- *Контрольные и самостоятельные работы*
- *Указания к задачам, решения*

7 класс

ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику А. В. Погорелова
«Геометрия. 7–9 классы» (М. : Просвещение)

7 класс

Рекомендовано
Российской Академией Образования

Методы решения задач
Тематическое планирование
Планы уроков
Объяснение сложных тем
Контрольные
и самостоятельные работы
Указания к задачам, решения

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2014

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
М71

Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Изображение учебного издания «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов. — М. : Просвещение» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Мищенко Т. М.

М71 Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 7 класс: к учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы» / Т. М. Мищенко. — М. : Издательство «Экзамен», 2014. — 206, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-07593-6

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Предлагаемые дидактические материалы и методические рекомендации призваны помочь учителю, работающему по учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы».

Пособие написано к учебнику, переработанному в соответствии со Стандартом второго поколения. Пособие полностью соответствует требованиям, предъявляемым Стандартом второго поколения к уровню изложения теоретического материала. Предлагаемые задания удовлетворяют требованиям планируемых результатов обучения, как обязательного уровня, так и повышенного уровня сложности.

Структура контрольных работ и форма заданий соответствуют структуре и форме заданий Государственной итоговой аттестации (ГИА).

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у учащихся умение применять полученные знания, как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

В пособии по *каждой главе* дается общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, методических особенностей ее изучения; контрольная работа.

По *каждому параграфу* дается комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания параграфа, требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала для учителя; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Подписано в печать 29.10.2013. Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 7,94. Усл. печ. л. 13. Тираж 10 000 экз. Заказ № 3075.

ISBN 978-5-377-07593-6

© Мищенко Т. М., 2014
© Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***, 2014

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена учителю, работающему в седьмых классах по учебнику А.В. Погорелова «Геометрия, 7–9» (М., Просвещение, 2013). В книге даны рекомендации, разработанные в соответствии с концепцией построения учебника, и позволяющие учителю сориентироваться в методических особенностях изложения учебного материала. Методические рекомендации написаны к учебнику, переработанному в соответствии со Стандартом второго поколения, и полностью соответствуют требованиям, предъявляемым Стандартом второго поколения к уровню изложения теоретического материала. Предлагаемые задания удовлетворяют требованиям планируемых результатов обучения, как обязательного уровня, так и повышенного уровня сложности.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить, во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у школьников умение применять полученные знания, как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

Основными особенностями авторского подхода к изложению учебного материала является разумное сочетание строгости логических рассуждений с опорой на наглядность при дедуктивном построении курса. Такой подход определяет и главный метод работы учителя с классом: ***обучение по образцам***, а именно, практически ***каждая теорема курса должна быть доказана учителем у доски***, независимо от того, будет или нет воспроизведение этого доказательства позднее требоваться от учащихся.

При обучении в седьмом классе важно осторожно и ненавязчиво приучать учащихся к четким формулировкам и грамотным ссылкам на ранее изученные геометрические факты. При этом целесообразно, чтобы образец ответа давал сам учитель, предлагая неоднократно повторить его при решении аналогичных задач. Требования же при оценке ответов учащихся и их письменных работ следует повышать постепенно. Такой подход будет способствовать развитию культуры мышления.

Отсюда следует, что большую часть урочного времени необходимо использовать для решения задач. В учебнике задачам отводится чрезвычайно важная роль. Некоторые из них содержат интересные геометрические факты и служат дополнением к теоретическому материалу учебного пособия. Все задачи учебника соответствуют требованиям планируемых результатов обучения, как их определяет Стандарт: либо как задачи обязательного уровня, либо как задачи повышенного уровня сложности.

Определенную сложность для учителя представляет необходимость взвешенного сочетания при решении задач письменных и устных форм работы. Письменные формы работы являются важнейшим видом деятельности, формирующим устойчивые навыки в проведении логических рассуждений при решении задач. Форма записи условия задачи, разумные, естественные и исторически сложившиеся сокращения и обозначения при вычислениях и доказательствах дисциплинируют мышление. Вместе с тем заметим, что увлечение письменными видами работы на уроках и дома приводит к большим и не всегда оправданным затратам времени и тормозит развитие устной геометрической речи.

Основное назначение данной книги — помочь учителю в организации учебной деятельности школьников. В ней даются:

по каждой главе — общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, контрольная работа;

по каждому параграфу — комментарий для учителя, включающий, если необходимо, общую характеристику содержания и требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала с разбивкой по отдельным вопросам; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Рубрика **«Методические рекомендации к изучению материала для учителя»**. ***<u>Весь материал данного раздела полностью адресован учителю и только учителю.</u>*** Здесь учитель получает некоторую оценочную рекомендацию к изучению материала, в которой расставлены акценты и указаны приоритеты. Все методические рекомендации должны быть адаптированы к конкретному классу, уровню подготовки учащихся. Такая адаптация может привести к уменьшению числа решаемых задач, увеличению числа часов, отводимых на изучение той или иной темы, за счет часов, отводимых на решение задач, или резерва.

В рекомендациях к изложению теоретического материала рассматриваются возможные методические подходы к изложению материала на уроке, рекомендуются упражнения для усвоения и закрепления материала. Для некоторых наиболее сложных теорем даются примерные планы проведения их доказательств. Новый материал будет лучше усваиваться учащимися, если они под руководством учителя сделают краткие записи в тетрадях. В большинстве случаев достаточно записать план доказательства или узловые моменты доказательства. Целесообразно сопроводить и доказательства теорем, и определения, и решения задач чертежами. Важно, чтобы учащиеся научились «видеть» условие задачи. Главное — увидеть, увидел — понял, а затем и решил и доказал. Важную роль играет умение делать чертеж. Чертеж становится элементом решения и составной частью решения, среди изучаемых методов есть и специальные методы построения чертежа. Такая работа будет способствовать развитию пространственного воображения.

Учитывая наличие рабочих тетрадей к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия 7–9», в методических рекомендациях указываются места их применения и даются рекомендации по их использованию.

Привлечение наглядных представлений не только не противоречит основному принципу построения курса, но является его методической особенностью. К каждой теме курса в учебнике даны фотографии, иллюстрирующие не только прообразы геометрических фигур, но и некоторые их свойства, а в рекомендациях даются методические указания, как использовать эти фотографии в учебном процессе. Кроме того, приведенные в учебнике фотографии позволяют увидеть связь между геометрией и окружающим миром.

Рубрика **«Примерное планирование изучения материала»**. Задачи к каждому уроку выделены по принципу их соответствия содержанию изучаемого на данном уроке теоретического материала. Поэтому кроме задач, указанных в разделе «Методические рекомендации к изучению материала для учителя», включены задачи, которые лучше решить с классом не в процессе объяснения нового материала, а в процессе его закрепления. Одна из задач этапа первичного закрепления в процессе изучения темы состоит в том, чтобы научить школьников решать новые задачи, применяя только что полученные сведения, новый аппарат. Как правило, именно эти задачи дублируются задачами домашнего задания.

При распределении учебного времени на изучение каждого параграфа последние несколько уроков отводятся на решение задач, один урок на контрольную работу и заключительный урок для разбора ошибок контрольной работы и подведения итогов. На уроках решения задач рекомендуется решить те задачи, которые не были решены в процессе изучения темы и провести подготовку к контрольной работе. В каждом параграфа резервируются несколько уроков для корректировки предложенного планирования в зависимости от особенностей класса и уровня подготовки учащихся.

В рубрике **«Указания к задачам»** приведены схемы решения основных (опорных задач) и решения наиболее трудных задач.

«Дополнительные задачи» образуют некоторый резерв для учителя. Одни из них должны помочь при закреплении нового материала, другие — подвести учащихся к решению задач из учебника, третьи могут быть использованы для индивидуальных заданий.

Целью **самостоятельных и контрольных работ** является проверка усвоения учащимися основного материала изученной темы (иногда части темы). При этом результаты проверки самостоятельных и контрольных работ позволяют зафиксировать не только достижение или недостижение учащимися уровня обязательной подготовки, но также достижение повышенного уровня обученности. В работах проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; делать чертежи, сопровождающие условие задачи, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Структура контрольных работ и форма заданий соответствуют структуре и форме заданий Государственной итоговой аттестации (ГИА).

В методических указаниях есть ссылки на сборник тестов: Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова»; тесты можно использовать для проведения текущего контроля.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

В § 1 учебника систематизируются и обобщаются знания и представления учащихся о простейших геометрических фигурах, накопленные ими в процессе изучения математики в I–VI классах и жизненного опыта. Поэтому в методическом плане вводимые понятия достаточно просты и в известной степени знакомы учащимся, а значит, ни подготовительной работы, ни значительной отработки не требуют.

С другой стороны, в этом параграфе закладываются основы курса планиметрии: вводятся основные понятия и система аксиом, позволяющая осуществить дедуктивное построение курса. А значит, учащиеся впервые встречаются со строго логическим изложением материала, что несомненно представляет для них определенную сложность.

Таким образом, из сказанного следует, что задаче обучения культуре математического мышления должна быть подчинена вся методика изучения § 1. Обучение грамотным логическим рассуждениям начинается с обучения грамотной устной и письменной речи. Большинство упражнений параграфа, в которых происходит закрепление терминологии и изучение основных свойств геометрических фигур, направлено на начальное формирование умений точно формулировать мысль и проводить доказательные рассуждения. Приведенные в тексте учебника решения некоторых задач служат образцами таких рассуждений. Целесообразно, чтобы на первых порах образец ответа давал сам учитель, предлагая неоднократно повторить его при решении аналогичных задач. Каждый ответ учащегося надо завершать правильной и точной формулировкой учителя, не снижая при этом оценку за *«корявый язык»* ученика при правильном понимании сути теоретического материала и верном решении задачи.

Изучение данной темы должно также решить задачу введения терминологии, развития наглядных представлений и навыков изображения планиметрических фигур и простейших геометрических конфигураций по условию задачи и в ходе решения задач. Все это необходимо для дальнейшего изучения курса геометрии, в силу чего важными аспектами изучения данной темы является работа с чертежами и рисунками. При решении задач следует прежде всего опираться на наглядные представления учащихся. Тем не менее решение задач следует использовать для постепенного формирования у учащихся первых навыков применения свойств геометрических фигур как опоры при решении задач. Поскольку решение многих задач данного параграфа видно непосредственно из рисунка, можно предложить выполнять рисунок в ходе решения задачи, сопровождая каждый шаг логическими рассуждениями.

Изучение § 1 ставит перед учителем сложные методические задачи:

1) начать обучение школьников четким геометрическим формулировкам и рассуждениям;

2) постепенно подводить учащихся к пониманию необходимости обоснования каждого утверждения, побуждая их вопросами: «Как?», «Почему?», «На каком основании?» и т.д.;

3) начать обучение умению выделять из текста геометрической задачи «*что дано*» и «*что требуется найти* (*доказать*)», кратко и четко записывать решение задачи;

4) отражать ситуацию, данную в условии задачи и возникшую в ходе ее решения на рисунке.

Всему этому учащиеся будут обучаться на протяжении всего курса геометрии, но в § 1 закладываются основы будущих умений и навыков.

Планируемые итоговые результаты изучения первого параграфа.

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках прямые, лучи, отрезки и углы; параллельные и пересекающиеся прямые;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: прямые, лучи, отрезки и углы, параллельные и пересекающиеся прямые;

– иллюстрировать и объяснять основные свойства простейших геометрических фигур;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- свойства измерения отрезков и углов,
- свойства взаимного расположения точек и прямых, свойства расположения точек на прямой.

Вводная беседа. Точка и прямая

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения первых двух пунктов. Учащиеся должны:

– иметь представление о том, что изучает геометрия, какой раздел геометрии называется планиметрией, какие фигуры в планиметрии являются основными;

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках точки и прямые, расположения точек и прямых;

– иллюстрировать и объяснять термины: «*лежит*», «*принадлежит*», «*проходит*», «*пересекаются*»;

– формулировать и объяснять основные свойства расположения точек и прямых, утверждение 1.1;

– решать задачи на применение основных свойств расположения точек и прямых, утверждение 1.1.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Примерный план вводной беседы:

1. Зарождение геометрии.
2. От практической геометрии к науке геометрия.
3. Геометрия Евклида, при этом обратить внимание учащихся на портрет Евклида на стр. 5 учебника.
4. История развития геометрии.
5. Геометрические фигуры.

Во вводной беседе можно использовать геометрические знания учащихся, полученные ими при обучении в I—VI классах, и их практические знания и жизненной опыт. Предложить им рассмотреть рисунки на стр. 4 и попросить их описать изображенные на них предметы, используя названия геометрических фигур. Указать геометрические фигуры в предметах, находящихся в классе и т. п. Если есть возможность, можно использовать плакаты или рисунки такого типа, как на рисунках 1 и 2. При этом следует задавать вопросы типа:

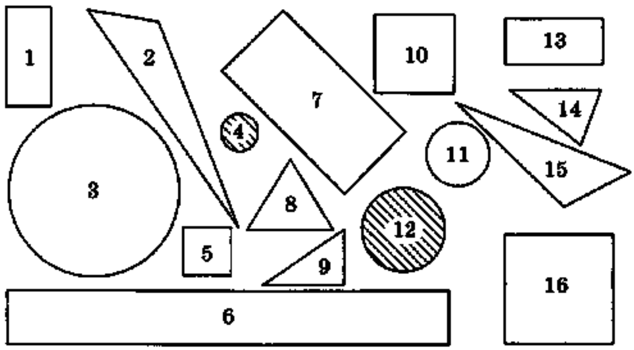


Рис. 1

1. Назовите геометрические фигуры на рисунке.
2. Какие из приведенных на рисунке фигур являются окружностями?
3. Какие из приведенных на рисунке фигур являются кругами?

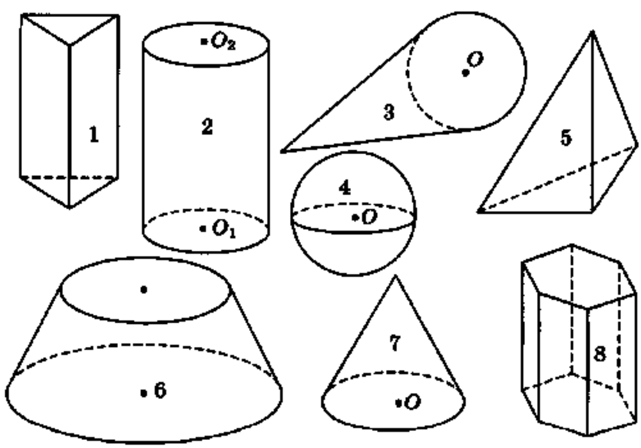


Рис. 2

1. Назовите пространственные фигуры на рисунке.
2. Какие из приведенных на рисунке пространственных тел являются конусами?
3. Какие из приведенных на рисунке пространственных тел являются пирамидами?

Время проведения вводной беседы — около 10–12 мин.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся задания 1–2.

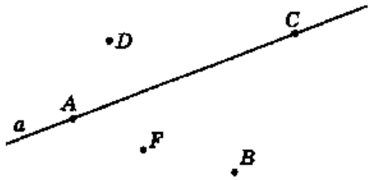


Рис. 3

2) При изложении материала пункта 2 «Точка и прямая» можно напомнить учащимся, что прямая на чертеже изображается с помощью линейки, обратив внимание на то, что *всегда* можно изобразить только часть прямой. На первых уроках при выполнении рисунка на доске нужно внимательно следить за четкостью и правильностью его выполнения учащимися.

3) Термины «*лежит*», «*принадлежит*», «*проходит*», «*пересекаются*» следует вводить одновременно с построением чертежа.

Говоря, что точка A *лежит* (*принадлежит*) на прямой a, следует сначала провести прямую a, а потом нарисовать на ней точку А. Говоря, что прямая *a проходит* через точку A, следует отметить точку А, а потом провести через нее прямую a (рис. 3).

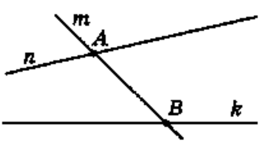


Рис. 4

Для закрепления введенных терминов: «*лежит*», «*принадлежит*», «*проходит*», «*пересекаются*» полезно выполнить с учащимися упражнение по готовому чертежу (рис. 4), предлагая вопросы:

1. На каких прямых лежит точка A?
2. Каким прямым принадлежит точка B?
3. Лежит ли точка B на прямой k?

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся задания 3–7. При этом, естественно, задание 3 должно быть разобрано учителем вместе с учащимися.

Для краткой записи утверждения «Точка A принадлежит прямой a» можно использовать знак $\in$, заменяющий слово «принадлежит», «$A \in d$».

Так как при выполнении письменных работ стандартной ошибкой учащихся является включение различных знаков ($\in$, $\perp$,

‖, < и т.д.) в словесный текст предложения, следует каждый раз при введении такого знака объяснять, где и как следует употреблять этот знак. Знак ∈ можно использовать в краткой записи задачи, в ответе к задаче, но не в формулировках определений, свойств или теорем.

4) После введения терминологии формулируется основное свойство *принадлежности* точек и прямых на плоскости (основное свойство I). Формулируя вторую часть основного свойства I (*«через любые две точки можно провести прямую, и только одну»*), следует обратить внимание учащихся на то, что в нем содержатся два утверждения:

1. Существование прямой («через любые две точки можно провести прямую»).
2. Ее единственность («и только одну»).

Необходимо привлечь внимание учащихся к двум способам обозначения прямой: либо одной строчной (малой) буквой или двумя точками, лежащими на ней, и, значит, двумя прописными (большими) буквами (рис. 3).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку основного свойства принадлежности точек и прямых на плоскости (основное свойство I) и выполнить задания 8–12. Таким образом, у учащихся будет создаваться конспект урока.

5) Решение задачи 3 из учебника, приведенное в тексте учебника, учителю лучше провести самому в виде связанного, естественного и в то же время логически обоснованного рассказа. При этом нужно придерживаться той же интонации, что и при введении основных свойств. А именно, как основные свойства являются естественным следствием жизненного опыта учащихся, так и доказательство этой задачи является естественным итогом логического развития учащихся на данном этапе. Следует иметь в виду, что при решении задачи 3 из учебника, хотя и дается первое доказательное рассуждение, не нужно на этом акцентировать внимание учащихся. Лучше предложить им несколько раз повторить рассуждение, задавая вопросы типа:

Почему две различные прямые не могут иметь две общие точки (три общие точки)?

Если бы две различные прямые имели две общие точки, какому свойству это противоречило бы?

Ответы на эти вопросы, а, следовательно, и неоднократное повторение связного рассуждения и есть первое знакомство с доказательными рассуждениями. Не нужно это доказательство делать письменным, это работа над устной речью.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради, после решения задачи 3 из учебника можно предложить части учащихся внимательно посмотреть решение задачи 12 и выполнить задание 13 из рабочей тетради. Задачи 12–15 дают возможность учителю организовать уровневую дифференциацию. Их можно использовать для домашнего задания или при повторении.

6) Если рабочая тетрадь не используется в процессе обучения, то по ходу изложения материала полезно выполнить с учащимися упражнения, данные в разделе «Дополнительные задачи». Упражнение 1 на закрепление вводимой терминологии, упражнения 2 и 3 — на закрепление основного свойства I, упражнения 4, 5 — на закрепление доказательных рассуждений задачи 3 из учебника. Комментируя домашнее задание, нужно:

1. объяснить учащимся, как в тексте учебного пособия искать ответ на вопросы для повторения и лучше всего это сделать на примере вопроса 3 или 4.

2. настойчиво и постоянно объяснять учащимся, что при решении задач <u>всегда</u> надо делать чертеж.

Проверку домашнего задания можно провести на следующем уроке в форме диктанта.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради для проверки усвоения материала второго пункта учебника проверку домашнего задания на втором уроке можно заменить выполнением заданий 6, 7. В этом случае при введении терминологии, связанной со взаимным расположением точек и прямых эти упражнения следует пропустить. По усмотрению учителя части учащихся можно предложить задания 12 и 13.

Примерное планирование изучения материала

В <u>классе</u> изложить весь теоретический материал (§ 1, п. 1, 2); <u>дома</u> — вопросы 1–4, задачи 1–4 из учебника.

Дополнительные задачи

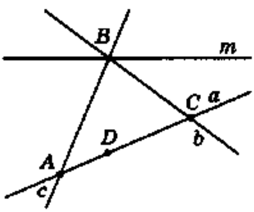


Рис. 5

1. По рисунку 5 ответьте на следующие вопросы:

а) Каким прямым принадлежит точка A, точка B, точка C, точка D?

б) Какие прямые проходят через точку A, точку B, точку C, точку D?

в) В какой точке пересекаются прямые a и b, b и с, c и m, b и m?

г) В какой точке пересекаются три прямые? Назовите эти прямые.

д) Назовите точки, принадлежащие прямой AC, и точки, не принадлежащие ей.

2. Точка C принадлежит прямой AB. Различны ли прямые AB и AC? Объясните ответ.

Решение. Прямые AB и AC не могут быть различными, так как они обе проходят через точки A и C, а через две точки можно провести только одну прямую (*по основному свойству* I).

3. Точки A и B принадлежат прямой l. Различны ли прямые AB и l Объясните ответ.

Решение. Прямые AB и l не могут быть различными, так как они обе проходят через точки A и B, а через две точки можно провести только одну прямую (*по основному свойству* I).

4. Различные прямые k и l пересекаются в точке A. Прямая k проходит через точку B. Проходит ли через точку B прямая l? Объясните ответ.

Решение. Прямая l не проходит через точку B, так как две различные прямые могут пересекаться только в одной точке (*по основному свойству* I).

5. Одна из двух пересекающихся прямых проходит через точку A, принадлежащую другой прямой. Различны ли точка A и точка пересечения данных прямых? Объясните ответ.

Решение. Эти точки совпадают, так как две прямые могут пересекаться только в одной точке (*по основному свойству* I).

6. Даны четыре прямые a, b, c и d. Прямые a, b и c пересекаются в одной точке. Прямые b, c и d также пересекаются в одной точке. Определите, сколько точек пересечения имеют четыре прямые a, b, c и d.

Ответ: одну.

Решение. Предположим, что точка M — точка пересечения прямых a, b и c отлична от точки N — точки пересечения прямых b, c и d. Это означает, что через две различные точки M и N проходят две различные прямые b и c. По аксиоме I (*Через любые две точки можно провести прямую, и только одну*) этого не может быть. Следовательно, все четыре прямые a, b, c и d пересекаются в одной точке.

Диктант

Диктант планируется на 10 мин. Провести его рекомендуется на следующем уроке вместо проверки домашнего задания.

1°. Проведите прямую, обозначьте ее двумя способами.

2°. Проведите прямую *a*, отметьте точку *C*, которая лежит на прямой *a*, точку *D*, которая не лежит на прямой *a*. Проведите прямую *b*, проходящую через точку *D* и пересекающую прямую *a*. Обозначьте точку пересечения прямых буквой *F*.

3°. **Дополнительная задача.** Проведите прямую *a*, отметьте две точки *A* и *B*, лежащие на прямой *a*. Можно ли через точки *A* и *B* провести прямую *b*, отличную от прямой *a*? Объясните ответ. (Дополнительная задача включается по усмотрению учителя.)

Отрезок. Измерение отрезков. Полуплоскости

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пунктов 3, 4, 5. Учащиеся должны:

– иллюстрировать термины: «лежит между», «разделять», «лежат по одну сторону от точки», «лежат по разные стороны от точки», «точки лежит в разных полуплоскостях»;

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках отрезок, взаимное расположение точек на прямой и на плоскости;

– формулировать и объяснять определение отрезка, основное свойство измерения отрезков и основное свойство взаимного расположения точек на плоскости;

– решать задачи на применение основного свойства измерения отрезков и основного свойства взаимного расположения точек на плоскости.

Начиная с пункта «Измерение отрезков», нужно постепенно проводить работу по обучению школьников доказательным рассуждениям, акцентируя внимание на обосновании решения задач, требовать от них более точные геометрические формулировки.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Термины *«лежать между»*, *«разделять»*, *«по одну сторону от точки»*, *«по разные стороны от точки»*, как при изучении § 2 («Точка и прямая») следует вводить одновременно с построением чертежа.

Для закрепления терминологии, связанной с описанием взаимного расположения точек на прямой, можно предложить учащимся выполнить упражнение **5** из учебника, дополнив его вопросами:

> 1) отметьте точку D так, чтобы точка B разделяла точки A и D;
> 2) отметьте точку F так, чтобы точка F *лежала между* (*разделяла*) точками A и B.

Выполнение этого упражнения сводится к изображению на доске и в тетрадях учащихся ситуации, заданной в упражнении (по *описанию* ситуации выполнять рисунок), а также к последующему проговариванию ситуации по рисунку (*описывать* ситуацию, изображенную на рисунке). При необходимости ответы учащихся уточняются и корректируются учителем. Записей условия задачи и заключения не делается.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради вместо упражнения 5 из учебника можно выполнить задание 16, затем записать определение отрезка и выполнить задания 17, 18.*

2) Формулируя *основное свойство взаимного расположения точек на прямой* (*основное свойство* **II**), следует обратить внимание на то, что в этом свойстве содержатся два утверждения: *существования* точки (*«Из трех точек на прямой <u>одна лежит</u> между двумя другими»*) и ее *единственности* (*«Из трех точек на прямой <u>только одна</u> лежит между двумя другими»*).

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировку основного свойства взаимного расположения точек на прямой* (*основного свойства* II).

3) В формулировках ряда задач, относящихся в учебном пособии к измерению отрезков, говорится о трех точках, лежащих на одной прямой (рис. 6). Непосредственное применение *основного свойства измерения отрезков* (*основное свойство* **III**) при доказательных рассуждениях ведет к потере одного логического шага, а именно: *если одна (точка A) из трех точек (A, B и C) прямой лежит между двумя другими* (рис. 6), *то она принадлежит отрезку* BC, и, следовательно, по основному свойству **III**: $BC = BA + AC$.

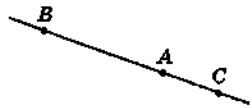


Рис. 6

На прямое применение *основного свойства измерения отрезков* можно решить задачу 7 из учебника — устно, с выполнением рисунка на доске и в тетрадях. Целью этой работы является проверка правильности усвоения учащимися *основного свойства* **III** и умения его применять.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировку* основного свойства **III**. *Затем на первоначальное закрепление* основного свойства измерения отрезков *устно выполнить задания 19–26. В тетради к задачам 19–23 записывается только ответ. В задачах 21–23 нужно сделать по условию задачи рисунок и из этого рисунка выделить конфигурацию, необходимую для решения задачи. Задача 21 имеет два решения, задача 23 не имеет решения, на это следует обратить внимание учащихся. К задачам 24 и 25 записываются вычисления и ответ. В задаче 26 нужно из данного в условии задачи рисунка выделить конфигурацию, необходимую для решения задачи, к задаче 26 следует записать только вычисления и ответ.*

При решении задач этого пункта полезно начать обучение учащихся краткой записи условия задачи и выполнению рисунка по условию задачи. Особое внимание нужно уделить записи задач, в формулировках которых условие разбито на две части (первая — до вопроса, вторая — после слова *«если»*, например, в задачах 7, 13, 14 и т.д.).

> *В рабочей тетради в задаче 27 приведен пример краткой записи условия и заключения задачи. Задача 28 является парной к задаче 27, поэтому, разобрав запись условия и заключения задачи 27, следует предложить учащимся самостоятельно оформить решение задачи 28. В задаче 29 приведен пример полного оформления задачи и доказательные*

рассуждения, сопровождающие запись задачи. Задачи 30 и 31 являются парными к задаче 15 из учебника (§ 1), поэтому их можно использовать для индивидуальной работы или при подготовке к контрольной работе.

4) Особенностью пункта «Измерение отрезков» является то, что среди относящихся к нему упражнений есть целый ряд задач (9–13), которые решаются методом от противного. Говорить о значении этого метода рассуждений на уроке более чем преждевременно. Пока неуместным представляется даже сам термин *«метод от противного»*. Умеренная фиксация внимания на этом методе произойдет в § 2. А пока же представляется единственно возможной в этом отношении задача — научить школьников первоначальным навыкам рассуждений от противного на примерах простых задач. К этим задачам следует относиться очень внимательно и терпеливо отрабатывать с учащимися схему доказательных рассуждений.

Примеры таких рассуждений даны в ходе решения задачи 9, которое приведено в учебнике, и задачи 10 в разделе «Указания к решению задач».

В задаче 32 из рабочей тетради приведен пример рассуждений от противного, который следует разобрать с учащимися на уроке. Полезно после этого предложить им самостоятельно кратко записать решение задачи 33 по приведенным в левом столбце рассуждениям. После этого самостоятельно проработать по учебнику решение задачи 9, а затем решать задачи 10–13 из учебника в соответствии с тематическим планированием.

Задачи 34–36 являются задачами повышенного уровня сложности для данного (начального) этапа обучения. Однако представляется полезным разобрать их решение в классе. Можно предложить их решить наиболее сильным учащимся и затем рассказать решение всему классу с комментариями учителя. На примере задачи 36 можно и нужно показать учащимся, что только внимательный анализ условия задачи и правильно выполненный чертеж приводит к решению. Анализируя условие задачи нужно обратить внимание учащихся на то, что отрезки откладываются от <u>одной</u> точки и в <u>одном</u> направлении. Решение задач 34–36 поможет учителю в развитии интереса школьников к геометрии.

5) *Основное свойство расположения точек относительно прямой на плоскости* (*основное свойство* IV) дано в краткой формулировке, удобной для запоминания учащимися. Однако при решении задач учащиеся будут пользоваться его «расширенной» формулировкой (*«Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости относительно прямой, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям относительно прямой, то отрезок пересекается с прямой»*), а также обратным утверждением (*«Если отрезок не пересекается с прямой, то его концы лежат в одной полуплоскости относительно прямой. Если отрезок пересекается с прямой, то его концы принадлежат разным полуплоскостям относительно прямой»*).

После введения *основного свойства* IV следует разобрать по тексту учебника задачу 17, сопровождая рассуждения выполнением рисунка 10 из учебника. (См. также комментарии к решению задач 16, 18, 19.) Решение задач в тетради должно выглядеть как серия последовательных рисунков с записью окончательного ответа.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировку основного свойства расположения точек относительно прямой на плоскости. Затем на прямое закрепление основного свойства V выполнить устно задания 37–40, в тетради к задачам 37–40 записывается только ответ. Все задачи, рекомендованные к этому пункту, способствуют развитию пространственных представлений школьников, а занимательная задача 41 позволяет учителю показать, как знание геометрического факта (три попарно пересекающиеся прямые делят плоскость на семь частей) может быть применено к решению практической задачи. И второе, как одна и та же ситуация может быть описана на обычном литературном языке (задача 41) и в геометрических терминах (задача 40). Занимательная задача 42 в своем решении использует основное свойство расположения точек относительно прямой на плоскости. Задание 42 будет успешно выполнено, если учащиеся усвоят, что при пересечении линии происходит переход из одной полуплоскости в другую и при этом, если число переходов четное, то мы остаемся в той же полуплоскости, с которой начинали движение, а при нечетном числе переходов — переходим в другую полуплоскость. Понятие «линия» известно учащимся из курса «Наглядной геометрии».

6) Дополнительные задачи 2–4 являются задачами повышенного уровня сложности, их можно использовать для дифференцированной работы на уроке или дать в качестве домашнего задания более успешным учащимся. Следует обратить внимание на формулировку задачи 4. Это задача с выбором ответа, таких задач в учебнике нет, поэтому ее имеет смысл разобрать в классе. Кажущаяся по форме простой, на самом деле эта задача достаточно сложная в своем решении.

7) Оперативную проверку знаний учащихся по теме «*Точка и прямая. Отрезок. Измерение отрезков*» рекомендуется провести как самостоятельную работу, используя задания с кратким ответом и задания с выбором ответа. Самостоятельную работу в форме теста рекомендуется провести на следующем уроке перед изучением темы «*Полупрямая*». Возможно учащиеся впервые встретятся с такой формой проверки, поэтому рекомендуется объяснить им, как надо выполнять такие задания.

Если к заданию даны варианты ответов, обозначенные цифрами 1, 2, 3 4, то только один из этих ответов верный. Обведите кружком ту цифру, которая соответствует, по Вашему мнению, верному ответу.

Если к заданию не приведены готовые ответы, то полученный вами ответ запишите в специально отведенном для этого месте:

Задание считается выполненным верно, если вы обвели кружком букву, которая соответствует верному ответу, или записали верный ответ.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе после проведения диктанта изложить весь теоретический материал пунктов (§ 1, п. 3, 4); решить задачи 5, 7 (1, 2) и 14; дома — вопросы 5–8, задачи 6, 7(3), 8, 15(2, 3).

На втором уроке в классе решить задачи 9, 10, 13; изложить весь теоретический материал пункта (§ 1, п. 5); решить задачи 17 и 18(1); дома — вопросы 9, 10, задачи 11, 12, 18(2, 5), 19.

Указания к решению задач

Задачи 10 и 11 аналогичны как по содержанию, так и по методу решения. Однако в формулировках задач одна и та же ситуация описана в различных терминах. Рассмотрим решение задачи 10.

Так мы рассуждаем при решении задачи:	Примерное оформление решения задачи.
	Решение.
1) Если бы точка B разделяла точки A и C, то она принадлежала бы отрезку AC. Тогда по *основному свойству измерения отрезков* (*«Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой»*): $AC = AB + BC$.	1) Пусть $B \in AC$, тогда $AC = AB + BC$ (по *основному свойству* III)
2) Подставляя значения длин отрезков $AC = 5$ см и $CB = 7$ см, данные в условии задачи, получим: $5 \text{ см} = 7 \text{ см} + AB$. По *основному свойству измерения отрезков* (*«Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля»*) длина отрезка BC больше нуля, т.е. $5 \text{ см} \neq 7 \text{ см} + AB$. Значит, $AC \neq AB + BC$.	2) $BC > 0$ (по *основному свойству* III), поэтому $5 \text{ см} \neq 7 \text{ см} + BC$. Значит, $AC \neq AB + BC$.
Получили противоречие. Значит, точка B не разделяет точки A и C.	*Ответ: Точка B не разделяет точки A и C.*

<u>Задачи 12 и 13</u> — аналогичные задачи. Рассмотрим решение задачи 13.

Рассуждения по ходу решения задачи:

1) Пусть $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, тогда по *основному свойству* III одна и только одна из точек A, B, C лежит между двумя другими.

2) Пусть $C \in AB$, тогда $AB = AC + CB$ (по *основному свойству* III). По условию $AB < AC + BC$, т.е. $AB \neq AC + BC$. Следовательно, $C \notin AB$.

3) Пусть $B \in AC$, тогда $AC = AB + BC$ и $BC > 0$ (по *основному свойству* III). По условию $AC < AB$, значит, $AC < AB + BC$, т.е. $AC \neq AB + \text{BC}$. Следовательно, $B \notin AC$.

4) Пусть $A \in BC$, тогда $BC = AB + AC$ и $AC > 0$ (по *основному свойству* III). По условию $BC < AB$, значит, $BC < AB + AC$, т.е. $BC \neq AB + AC$. Следовательно, $A \notin BC$.

5) Точки A, B и C не лежат на одной прямой.

Задачи 16, 18, 19 являются очень важными, так как учащиеся должны не только понять условие задачи и выполнить рисунок по описанию ситуации, но и провести доказательные рассуждения. Поясним на примере задачи 18 (1).

Рассуждения по ходу решения задачи 18 (1):

Дана прямая a (проводим прямую и обозначаем ее). Точка A (отмечаем на рисунке) лежит в некоторой полуплоскости (отмечаем полуплоскость). Так как по условию задачи отрезок AB пересекает прямую a (строим отрезок, отмечаем точку пересечения), значит, по *основному свойству* IV точка B лежит в другой полуплоскости (указываем полуплоскость). Так как отрезок BC (строим) тоже пересекает прямую a (отмечаем точку пересечения), значит, точка C лежит не в той полуплоскости, в которой лежит точка B (указываем полуплоскость). Так как прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, то точка C лежит в той же полуплоскости, что и точка A. Проводим те же рассуждения относительно отрезка CD. В результате последовательных рассуждений, сопровождаемых выполнением рисунка 7, получен ответ на вопрос задачи.

Запись в тетради:

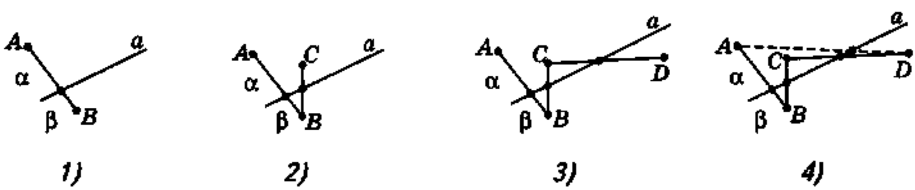


Рис. 7

Ответ: Отрезок AD пересекает прямую a.

Дополнительные задачи

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка AC, если:

а) $AB = 4,2$ см; $BC = 5,2$ см.

б) $AB = 2,8$ см; $BC = 2,1$ см.

Решение. Точку C мы можем расположить двумя способами (рис. 8 и 9).

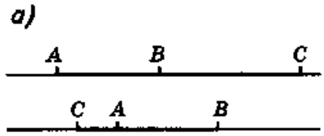


Рис. 8

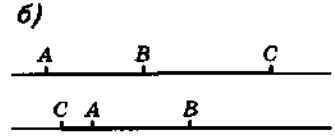


Рис. 9

2. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка AD, если $AB = 1{,}2$ см; $BC = 1{,}4$ см; $CD = 1{,}7$ см.

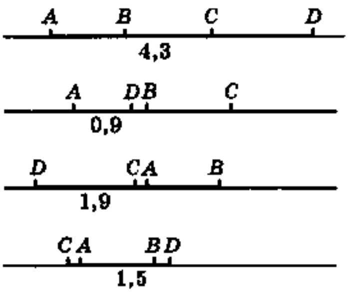


Рис. 10

Решение. Поступим так же, как и в задаче 1. Возьмем две точки A и B. Тогда для C возможны два положения вправо и влево от точки B. Затем «шагая» вправо и влево от точки C, получим возможные положения точки D. Для каждого положения C возможны два положения точки D. Ситуация задачи отражена на рисунке 10. Возможны значения AD: 4,3 см; 0,9 см; 1,9 см; 1,5 см.

3. Докажите, что если середины отрезков AB и CD, расположенных на одной прямой, совпадают, то $AC = BD$.

4. На прямой a отмечены точки A, B и C так, что $AB = 15$ см, $AC = 8$ см, $BC = 7$ см. Определите последовательность точек.

1. B, C, A; 2. A, C, B; 3. C, B, A; 4. A, B, C.

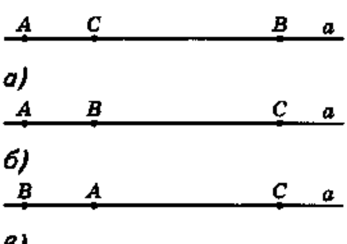


Рис. 11

Решение. По условию точки A, B и C лежат на одной прямой, тогда по *основному свойству* II одна и только одна из точек A, B и C лежит между двумя другими.

Пусть $C \in AB$ (рис. 11, а), тогда по основному свойству измерения отрезков (длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой):

$AB = AC + CB$. По условию $AB = 15$ см, а $AC + CB = 8 + 7 =$ $= 18$ (см), т.е. $AB = AC + BC$. Следовательно, точка A принадлежит отрезку BC.

Однако следует проверить и другие возможные расположения точек A, B и C на прямой a.

Пусть $B \in AC$ (рис. 11, б), тогда по основному свойству измерения отрезков (длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой): $AC = AB + CB$. По условию $AC = 8$ см, а $AB + BC = 15 + 7 =$ $= 22$ (см), т.е. $AC < AB + BC$, значит, $AC \neq AB + BC$. Следовательно, $B \notin AC$.

Пусть $A \in BC$ (рис. 11, в), тогда по основному свойству измерения отрезков (длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой): $CB =$ $AB + AC$. По условию $BC = 7$ см, а $AC + AB = 15 + 8 =$ $= 23$ (см), т.е. $BC < AC + AB$, значит, $BC \neq AB + AC$. Следовательно, $A \notin BC$.

Таким образом, только одна последовательность точек удовлетворяет условию задачи, а именно последовательность точек A, C, B.

Ответ: (A, C, B).

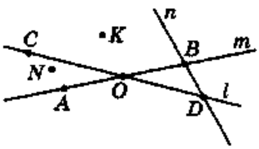
5. Два грибника пошли в лес за грибами. Лес пересекает дорога. Пока грибники собирали грибы, они несколько раз переходили дорогу. Известно, что один из грибников переходил дорогу на три раза больше, чем другой. Определите, по одну сторону от дороги или по разные они вышли из леса.

Решение. Если один из них пересекал дорогу x раз, то другой $(x + 3)$ раза. А так как x и $(x + 3)$ — числа разной четности, значит, грибники находятся по разные стороны дороги.

Самостоятельная работа по теме «Точка и прямая. Отрезок. Измерение отрезков. Полуплоскости»

Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

1-й вариант

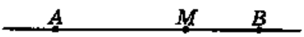


1. Определите, через какие точки проходит прямая n.

Ответ: ____________________

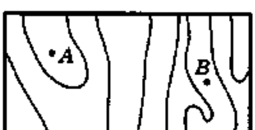
2. На прямой последовательно отмечены точки A, B, C и D. Запишите отрезок AB в виде разности двух отрезков. Сделайте рисунок.

Ответ: ____________________



3. Точка M лежит на отрезке AB и делит его на два отрезка AM и MB. Отрезок MB равен половине отрезка AM. Найдите длину отрезка MB, если AB равен 21 см.

Ответ: 1. 21 см; 2. 7 см; 3. 14 см; 4. 28 см.



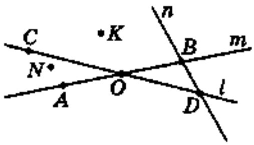
4. На листе бумаги проведена извилистая линия, которая делит лист на две части (внутреннюю и внешнюю). От листа бумаги остался небольшой клочок, на котором отмечены две точки A и B. Определите, лежат эти точки в одной части листа или нет.

Ответ: ____________________

5. На прямой a отмечены точки A, B и C так, что $AB = 12$ см, $AC = 3$ см, $BC = 15$ см. Определите последовательность точек.

Ответ: 1. B, C, A; 2. C, A, B; 3. C, B, A; 4. A, B, C.

2-й вариант

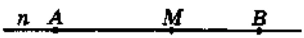


1. Определите, каким прямым принадлежит точка O.

Ответ: ____________________

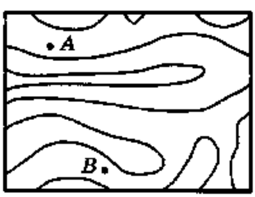
2. На прямой последовательно отмечены точки A, B, C и D. Запишите отрезок AC в виде суммы двух отрезков. Сделайте рисунок.

Ответ: ____________________



3. Точка M лежит на отрезке AB и делит его на два отрезка AM и MB. Отрезок MB на 3 см больше отрезка AM. Найдите длину отрезка AM, если AB равен 21 см.

Ответ: 1. 21 см; 2. 12 см; 3. 3 см; 4. 9 см



4. На листе бумаги проведена извилистая линия, которая делит лист на две части (внутреннюю и внешнюю). От листа бумаги остался небольшой клочок, на котором отмечены две точки A и B. Определите, лежат эти точки в одной части листа или нет.

Ответ: ____________________

5. На прямой a отмечены точки A, B и C так, что $AB = 6$ см, $AC = 14$ см, $BC = 5$ см. Определите последовательность точек.

Ответ: 1. B, C, A; 2. C, A, B; 3. C, B, A; 4. A, B, C.

Полупрямая

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пункта 6. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках полупрямую (луч), дополнительные полупрямые;

– формулировать и объяснять определение полупрямой (луча), дополнительных полупрямых.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Учащимся из курса V–VI класса известны понятия полупрямой (луча) и дополнительных полупрямых. Поэтому следует предложить учащимся самостоятельно разобрать решение задачи 20 по тексту учебника, повторить определения полупрямой (луча) и дополнительных полупрямых.

Закрепление введенной терминологии можно провести в ходе работы по готовому рисунку (рис. 12), предложив учащимся назвать:

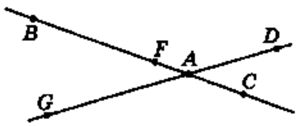


Рис. 12

а) все лучи с начальной точкой A;
б) лучи с начальной точкой F;
в) полупрямые с начальной точкой C;
г) пары дополнительных полупрямых;
д) совпадающие лучи.

Полезно выполнить задания 1 и 2 из дополнительных задач, акцентируя внимание учащихся на отличие способов расположения отрезка на прямой и на луче.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради предложить учащимся записать определение полупрямой (луча) и дополнительных полупрямых. Закрепление введенной терминологии можно провести в ходе устного выполнения заданий 43–50. Возможные способы расположения отрезка на прямой и на луче от его начальной точки учащиеся выяснят, выполняя задания 47 и 48. Решение задач 49 и 50 позволит акцентировать внимание учащихся на том, что задачи могут иметь несколько решений и их число можно определить, не решая задачу, а анализируя ее условие. И проверить насколько хорошо учащиеся поняли отличие способов расположения отрезка на прямой и на луче, если одним из концов отрезка является начало луча.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта (§ 1, п. 6); разобрать по тексту учебника задачи 20 и 22; провести самостоятельную работу по теме «*Точка и прямая. Отрезок. Измерение отрезков*»; дома — вопросы 11, 12, задачи 15 (1, 4), 18 (3, 4), 21.

Дополнительные задачи

1. Сколькими способами можно отложить отрезок RP, равный 2 см, на прямой от точки R?

2. Сколькими способами можно отложить отрезок RP, равный 2 см, на луче с началом в точке R?

Угол

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пункта 7. Учащиеся должны:

– иллюстрировать термин «луч проходит между сторонами угла»;

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках угол и лучи, проходящие между сторонами углов;

– формулировать и объяснять определение угла, основное свойство измерения углов;

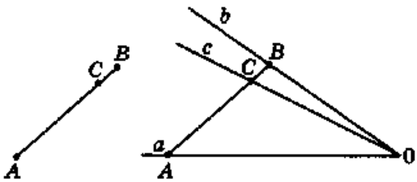
– решать задачи на применение основного свойства измерения углов.

Содержание пункта «Измерение углов», позволяет активизировать работу по обучению школьников доказательным рассуждениям, акцентируя внимание на обосновании решения задач, требовать от них более точные геометрические формулировки.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Учащимся из курса V–VI классов известны понятия угла и его элементов. Поэтому можно предложить им рассмотреть рисунки на стр. 9 и на каждом из рисунков найти углы.

После введения определения угла и его элементов следует обратить внимание учащихся на то, что угол можно обозначать тремя способами: «*либо указанием его вершины* ($\angle A$), *либо указанием его сторон* ($\angle(ab)$, *либо указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах угла* ($\angle BAC$)».



а) *б)*

Рис. 13

2) Перед введением термина *«проходит между»* полезно вспомнить термин *«лежит между»* и параллельно дать рисунки 13, а) и 10, б). Отрезок AB (рис. 13, б) лежит своими концами на сторонах угла: конец A — на стороне a, конец B — на стороне b.

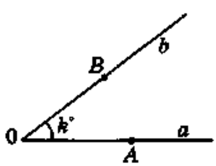
Луч c пересекает отрезок в точке C, которая лежит между концами отрезка A и B. Значит, луч c проходит между сторонами угла (ab). При этом следует заметить, что между сторонами развернутого угла проходит <u>любой</u> луч с началом в вершине угла.

> ***При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения угла, его элементов, развернутого угла, термина «луч проходит между» и выполнить задания 51–55. При ответе на вопрос задачи 53 следует обратить внимание учащихся на тот факт, что между сторонами развернутого угла проходит любой луч с началом в вершине угла.***

Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля:

$AB > 0$.

а)



в)

Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля:

$\angle AOB = k^\circ > 0$ или

$\angle(ab) = k^\circ > 0$.

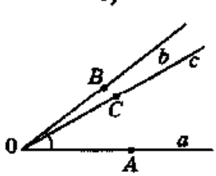
г)

Развернутый угол равен 180°.

Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой:

$AB = AC + CB.$

б)



д)

Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами:

$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ или

$\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$.

Рис. 14

На рисунке 14 приведен возможный вариант плаката, который будет очень полезен при объяснении свойств угла, поскольку позволит использовать аналогии свойств отрезков и углов.

3) Перед формулировкой *основного свойства измерения углов* полезно повторить формулировку *основного свойства измерения отрезков*, используя левый столбик плаката, сделав при этом рисунок и соответствующую запись на доске (рис. 14, а) и б). При формулировке *основного свойства измерения углов* также можно сделать серию рисунков, иллюстрирующих формулировку (рис. 14, *в, г, д*). Видимые из рисунков аналогии помогают лучшему усвоению изучаемого материала.

На непосредственное применение *основного свойства измерения углов* можно устно решить задачу 24 по рисунку, выполненному на доске и в тетрадях. После этого следует разобрать с учащимися по учебнику решение задачи 25(1).

> *В рабочей тетради приведена таблица, аналогичная рисунку 14. Следует записать формулировки основных свойств измерения отрезков и углов в отведенных для этого местах. Задача 56 фактически является контрольным вопросом. На прямое закрепление основного свойства V выполнить задания 57–59. В задаче 60 приведен пример рассуждений от противного, который следует разобрать с учащимися на уроке. После этого можно предложить им самостоятельно проработать по учебнику решение задачи 25 (1), а затем решить задачу 25 (2), из учебника в соответствии с тематическим планированием.*

4) На следующем уроке, если позволяет уровень геометрической подготовки класса вместо проверки домашнего задания можно провести самостоятельную работу по теме: «Угол».

Примерное планирование изучения материала

На уроке <u>в классе</u>: — изложить весь теоретический материал пункта (§ 1, п. 7); разобрать по тексту учебника задачу 25 (1), и решить задачу 24; <u>дома</u> — вопросы 13–18, задачи 23, 25 (2), 26 (1, 2).

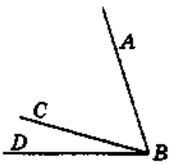
Самостоятельная работа по теме «Угол»

Самостоятельная работа рассчитана на 15 мин.

1-й вариант

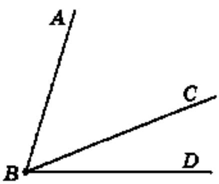
1. Определите, какой угол образуют направления на север и юг.

Ответ: 1. прямой; 2. тупой; 3. острый; 4. развернутый.



2. На рисунке $\angle ABD = 73°$, а $\angle CBD = 23°$. Найдите величину угла ABC.

Ответ: $\angle ABC =$ ____________________



3. Луч BC проходит между сторонами угла ABD. Найдите угол ABD, если $\angle CBD = 16°$, а угол ABC в 3 раз больше угла CBD.

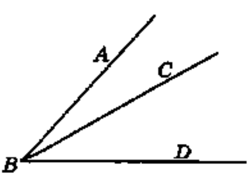
Ответ: $\angle ABD =$ ____________________

4. Определите, может ли луч k проходить между сторонами прямого угла (mn), если $\angle(mk) = 27°$, $\angle(kn) = 73°$.

2-й вариант

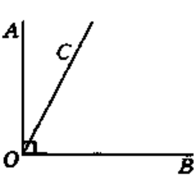
1. Определите, какой угол образуют направления на северо-восток и восток.

Ответ: 1. прямой; 2. тупой; 3. острый; 4. развернутый.



2. На рисунке $\angle ABC = 27°$, а $\angle CBD = 32°$. Найдите величину угла ABD.

Ответ: $\angle ABD =$ ____________________



3. Луч OC проходит между сторонами прямого угла AOB и делит его в отношении $1:4$. Найдите $\angle COB$, если $\angle AOC$ в четыре раза меньше $\angle COB$.

Ответ: ____________________

4. Может ли луч k проходить между сторонами угла (mn), если $\angle(mk) = 27°$, $\angle(kn) = 73°$, $\angle(mn) = 70°$?

Основные свойства откладывания отрезков и углов

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пункта 8. Учащиеся должны:

– уметь откладывать от данной точки на данной полупрямой и прямой отрезок заданной длины;

– уметь откладывать от данной полупрямой в заданную полуплоскость с помощью транспортира угол заданной градусной меры;

– формулировать и объяснять формулировки основных свойств откладывания отрезков и углов;

– решать задачи на применение основных свойств откладывания отрезков и углов.

Методические рекомендации к изучению материала

1) После введения *основных свойств откладывания отрезков и углов* (*основные свойства* **VI** и **VII**) можно предложить учащимся ответить на вопросы:

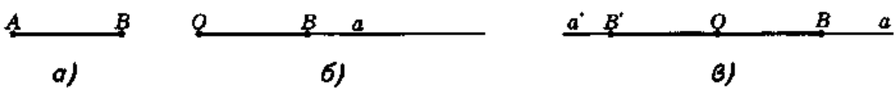


Рис. 15

1) Сколько отрезков данной длины можно отложить на данной полупрямой от ее начальной точки (рис. 15, а и б)?
2) Сколько отрезков данной длины можно отложить на данной прямой от данной точки (рис. 15, в)?

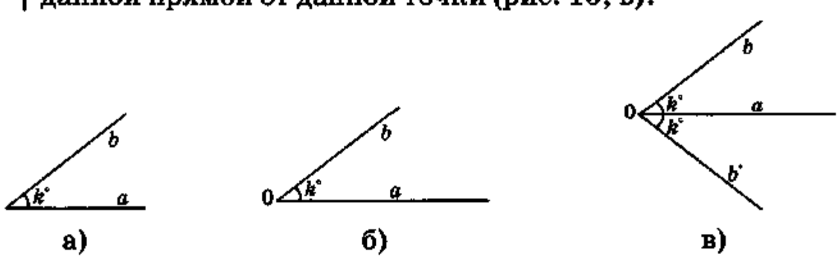


Рис. 16

> 3) Сколько углов данной градусной меры можно отложить в заданную полуплоскость от данной полупрямой (рис. 16, а и б)?
> 4) Сколько углов заданной градусной меры можно отложить от данной полупрямой (рис. 16, в)?

После этого полезно разобрать с учащимися по тексту учебника решение задачи 30. В процессе решения задачи повторяется материал пункта 4 «*Измерение отрезков*». И из ее решения следует вывод, что «*если на полупрямой AB отложить отрезок AC, меньший отрезка AB, то точка C будет лежать между точками A и B*». Этим выводом удобно воспользоваться при решении задач 31(1, 2) и 51 из учебника.

На прямое применение *основного свойства откладывания отрезков* можно устно решить задачу 31 с выполнением рисунка на доске и в тетради.

> *В рабочей тетради следует записать формулировки* основных свойств откладывания отрезков и углов. *На прямое закрепление* основных свойств *VI и VII устно выполнить задания 61–64. Затем разобрать с учащимися по учебнику решение задачи 30. После этого можно предложить им решить задачи 65–68, которые являются аналогами заданий 1–4 из дополнительных задач.*

Примерное планирование изучения материала

В классе провести самостоятельную работу по теме: «*Полуплоскости. Полупрямая. Угол*»; изложить весь теоретический материал пункта (§ 1, п. 8); и решить задачи 30 и 31(1, 2); дома — вопрос 19, задачи 27, 28, 29, 31(3).

Указания к решению задач

Задача 31. При решении этой задачи можно воспользоваться результатом задачи 30. В первом случае: $AC < AB$, следовательно, точка C лежит между точками A и B. Во втором случае: $AB < AC$, следовательно, точка B лежит между точками A и C. А теперь можно применить основное свойство измерения отрезков и найти длину отрезка BC в каждом случае.

Дополнительные задачи

1. На прямой от точки A отложены отрезки $AB = 13$ см и $AC = 8$ см. Найдите длину отрезка BC. Сколько решений имеет задача?

2. На полупрямой от ее начальной точки A отложены отрезки $AB = 13$ см и $AC = 8$ см. Найдите длину отрезка BC. Сколько решений имеет задача?

3. От данной полупрямой в одну полуплоскость отложены $\angle ABC = 56°$ и $\angle ABD = 43°$. Найдите $\angle DBC$. Сколько решений имеет задача?

4. От данной полупрямой отложены $\angle ABC = 56°$ и $\angle ABD = 43°$. Найдите $\angle DBC$. Сколько решений имеет задача?

Треугольник. Существование треугольника, равного данному

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пунктов 9 и 10. Учащиеся должны:

– иллюстрировать термины «равные отрезки», «равные углы», «равные треугольники», «соответствующие стороны», «соответствующие углы»;

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках треугольник, его стороны и углы, равные отрезки, равные углы, равные треугольники, соответствующие стороны, соответствующие углы;

– формулировать и объяснять определение треугольника и его элементов, основное свойство существования треугольника, равного данному;

– решать задачи на применение понятий «равные отрезки», «равные углы», «равные треугольники».

К моменту изучения данной темы учащимися накоплен некоторый объем знаний о свойствах геометрических фигур, что позволяет им проводить простейшие доказательные рассуждения в ходе решения задач. С другой стороны, у них еще нет достаточного опыта поиска решения задачи, поэтому необходимо обращать их внимание на наличие таких условий в формулировке задачи, которые позволяют применять то или иное свойство.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Учащимся из курса V–VI класса известно понятия треугольника и его элементов. Поэтому можно предложить им рассмотреть рисунок на стр. 12 и найти на нем треугольники.

В определении *треугольника* следует обратить внимание учащихся на то, что три точки, являющиеся вершинами треугольника, не лежат на одной прямой, продемонстрировав два рисунка (рис. 17, а, б). На первом рисунке точки A, B и C не лежат на одной прямой, а на втором три точки A, B и C лежат на одной прямой и треугольник не существует.

а)   б)

Рис. 17

2) В учебнике при введении понятия *равенства треугольников* («*Треугольники равны, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны*») используется термин «*соответствующие*», что указывает на строгую последовательность обозначения вершин треугольника. Это является существенной особенностью данного в учебнике определения равенства треугольников. В записи равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ соответствие вершин и сторон устанавливается из самой записи:

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1;$$
$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1.$$

3) Для закрепления определения равенства треугольников полезно предложить учащимся следующее упражнение:

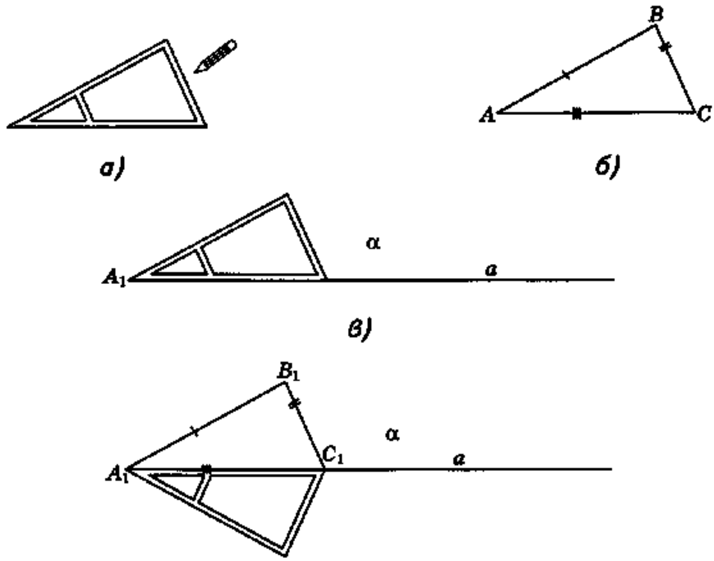
> Нарисуйте два равных треугольника. Отметьте на рисунке равные углы и равные стороны. Обозначьте эти треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы выполнялось равенство $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Запишите равные углы и равные стороны данных треугольников.

После этого полезно разобрать с учащимися по учебнику решение задачи 38. А на прямое применение определения равных треугольников можно устно решить задачу 36.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения треугольника, его элементов, равных отрезков, углов и треугольников. А затем выполнить задания 69–77. Задачи 74 и 75 являются парными к задачам 36 и 37 из учебника (§ 1), поэтому, разобрав по учебнику решение задачи 38, можно предложить учащимся самостоятельно решить задачи 74 и 75. Задачи 73 и 74 также можно использовать для индивидуальной работы или при подготовке к контрольной работе.*

4) *Основное свойство существования треугольника, равного данному* (*основное свойство* VIII), формулируется в учебном пособии в краткой форме, удобной для запоминания. Однако при доказательстве признаков равенства треугольников в § 3 учащимся придется пользоваться алгоритмом построения треугольника, равного данному, описанным в учебнике на странице 15: *«Имеем треугольник ABC и луч a. Переместим треугольник ABC так, чтобы его вершина A совместилась с началом A_1 луча a, вершина B попала на луч a, а вершина C оказалась в заданной полуплоскости α (β) относительно луча a»*.

При разборе с учащимися в классе указанного алгоритма удобно использовать заранее изготовленный каркасный треугольник или воспользоваться обычным школьным треугольником. С помощью этого треугольника (рис. 18, а) нарисовать на доске треугольник (рис. 18, б). Затем нарисовать луч и показать, как можно переместить треугольник, равный данному, в заданную полуплоскость либо α (рис. 18, в), либо β (рис. 18, г).



г)

Рис. 18

> ***В рабочей тетради следует записать формулировку основного свойства существования треугольника, равного данному.***

5) На следующем уроке вместо проверки домашнего задания можно провести самостоятельную работу по теме: «Откладывание отрезков и углов. Существование треугольника, равного данному». В задачах 3 обоих вариантов требуется записать в одном из ответов то, что является условием задачи. Это надо сделать для того, чтобы проверить: насколько внимательно учащиеся читают условие задачи.

Примерное планирование изучения материала

В классе изложить весь теоретический материал пунктов (§ 1, п. 9 и 10), разобрать по тексту учебника решение задачи 38 и решить задачу 36; дома — вопросы 20–26, задачи 32, 35, 37, 39, 40.

Указания к решению задач

<u>Задачи 33 и 34</u> по существу являются задачами на прямое применение основных свойств измерения отрезков и углов в более сложной ситуации. Поэтому их удобно использовать при повторении материала всего параграфа.

33. Сторона AB треугольника ABC — это отрезок AB. По условию точка D принадлежит отрезку AB, значит (по основному свойству измерения отрезков), справедливо равенство $AB = AD + DB = 5$ см $+ 6$ см $= 11$ см.

34. Луч CD пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла, т.е. луч CD проходит между сторонами этого угла, значит (по основному свойству измерения углов),

$\angle BCA = \angle BCD + \angle ACD = 70° + 30° = 100°$.

Оформление решений <u>задач 37–39</u> аналогично оформлению решения <u>задачи 36</u>.

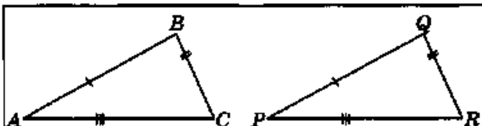


Рис. 19

Дано: $\Delta ABC = \Delta PQR$, $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см

Найти: PQ, QR, PR.

Решение.
$\Delta ABC = \Delta PQR$, (по условию), поэтому $AB = PQ$, $BC = QR$, $AC = PR$.
Значит, $PQ = 6$ см, $QR = 5$ см, $PR = 7$ см.

Дополнительные задачи

1. Каким свойством обладает треугольник ABC, если верно равенство: $\Delta ABC = \Delta BCA$?

1. $BC = CA \neq AB$; 2. $AC = AB \neq BC$; 3. $BC = CA = AB$; 4. $BC \neq CA \neq AB$.

Ответ: 3 ($BC = CA = AB$).

Решение. По условию задачи $\Delta ABC = \Delta BCA$, значит, стороны AB и BC, BC и CA, AC и BA попарно равны, т.е. $AB = BC = CA$. Все стороны треугольника ABC равны.

2. Каким свойством обладает треугольник ABC, если верно равенство: $\Delta ABC = \Delta BAC$?

1. $BC = CA \neq AB$; 2. $AC = AB \neq BC$; 3. $BC = CA = AB$; 4. $BC \neq CA \neq AB$.

Ответ: 1 ($BC = CA \neq AB$).

Решение. По условию задачи $\Delta ABC = \Delta BAC$, значит, стороны AB и BA, BC и AC, AC и BC попарно равны. Но AB и BA — это одна сторона, а $BC = AC$, $AC = BC$ — это два равенства одних и тех же сторон. Следовательно, у данного треугольника стороны BC и CA равны.

Самостоятельная работа по теме «Откладывание отрезков и углов. Существование треугольника, равного данному»

Самостоятельная работа планируется на 10 мин. Провести ее рекомендуется на следующем уроке вместо проверки домашнего задания.

1-й вариант

1. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

На прямой от точки A отложены отрезки $AB = 13$ см и $AC = 8$ см. Найдите длину отрезка BC.

Ответ: ______________________

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

От данного луча в заданную полуплоскость отложены $\angle ABC = 56°$ и $\angle ABD = 43°$. Найдите $\angle DBC$.

Ответ: ______________________

3. Треугольники ABC и FED равны. Известно, что $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $FD = 6$ см. Найдите стороны треугольника FED.

FE = __________; ED = __________; FD = __________.

4. Треугольники ABC и FED равны. Известно, что $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 36°$, $\angle B = 62°$, $\angle C = 84°$. Найдите стороны FE и FD и угол F треугольника FED.

$FE =$ _________; $FD =$ _________; $\angle F =$ _________.

2-й вариант

1. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

На луче с началом в точке A отложены отрезки AC = 8 см и AD = 4 см. Найдите длину отрезка CD.

Ответ: _______________________________

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

От данного луча отложены $\angle ABC = 67°$ и $\angle ABD = 23°$. Найдите $\angle DBC$.

Ответ: _______________________________

3. Треугольники ABC и MNL равны. Известно, что $\angle A = 36°$, $\angle N = 62°$, $\angle L = 82°$. Найдите углы треугольника ABC.

$\angle A =$ _________; $\angle B =$ _________; $\angle C =$ _________.

4. Треугольники ABC и FED равны. Известно, что $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 36°$, $\angle B = 62°$, $\angle C = 84°$. Найдите сторону ED и углы F и E треугольника FED.

$ED =$ _________; $\angle F =$ _________; $\angle E =$ _________.

Основное свойство параллельных прямых. Теоремы, доказательства, аксиомы

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пунктов 11–13. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках параллельные прямые;

– формулировать и объяснять определение параллельных прямых, формулировку основного свойства параллельных прямых;

– объяснять термины «аксиома», «теорема», «определение» и приводить примеры аксиом, теорем и определений;

– решать задачи на применение параллельных прямых и основного свойства параллельных прямых.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Для экономии времени изучение пункта 11 лучше отнести к теме «*Параллельность прямых*» (§ 4).

Понятие «*параллельные прямые*» не является для учащихся новым, оно известно им из курса «*Наглядная геометрия*» V–VI класс. Поэтому можно предложить им рассмотреть рисунки на стр. 14 и найти на них параллельные прямые.

В учебнике приводится практический способ построения параллельных прямых с помощью угольника и линейки, как правило, известный учащимся. Новым для учащихся является формулировка *основного свойства*, обобщающая их знания и опыт.

Если учитель сочтет необходимым в соответствии с построением учебника изучить *основное свойство параллельных прямых* в данной теме, то вопрос о существовании и единственности прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку, обсуждать с учащимися преждевременно. Он будет подробно разбираться в § 4 после решения задачи 8.

Здесь же полезно разъяснить учащимся, что слова «*не более одной*» означают, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, параллельно ей можно провести либо одну прямую, либо ни одной, но нельзя провести две или более прямых.

После этого разобрать с учащимися по тексту учебника решение задачи 41. Обратить внимание учащихся в ходе решения задачи на термин «*можно провести не более одной прямой*».

2) Весь материал пунктов 12 и 13 учитель рассказывает сам без привлечения учащихся. Вводимая здесь терминология знакома школьникам и не требует закрепления, просто расставляются акценты и приводятся примеры, иллюстрирующие знакомые термины. Теорема 1.1 является одним из таких примеров.

Она позволяет выделить в формулировке теоремы *условие* и *заключение* и объяснить что такое *доказательство*. Однако, поскольку доказательные рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы 1.1, аналогичны аргументации, используемой при решении задачи 18, целесообразно решить задачу 18 (6) перед доказательством теоремы.

3) Сделать запись условия теоремы и рисунок (рис. 20), при этом следует обратить внимание учащихся на то, что видимые на рисунке закономерности не могут и не должны служить обоснованием доказательных рассуждений.

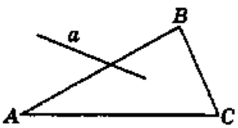


Рис. 20

Дано: ΔABC, $A \notin a$, $B \notin a$, $C \notin a$;
прямая a пересекает AB.

Доказать: прямая a пересекает либо BC, либо AC.

Доказательство.

1) По <u>условию теоремы</u> прямая a не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает сторону AB (рис. 20).

2) По <u>основному свойству расположения точек на плоскости II</u> прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости.

3) По основному свойству расположения точек на плоскости II точки A и B лежат в разных полуплоскостях, так как отрезок AB пересекается с прямой a (рис. 20).

4) Точка C лежит в одной из двух полуплоскостей: либо в той, что и точка A, либо в той, что и точка B.

5) Пусть точка C лежит в одной полуплоскости с точкой A, тогда <u>по основному свойству расположения точек относительно прямой на плоскости IV</u> отрезок AC не пересекается, а отрезок BC пересекается с прямой a (рис. 21).

6) Пусть точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, тогда <u>по основному свойству расположения точек относительно прямой на плоскости IV</u> отрезок BC не пересекается, а отрезок AC пересекается с прямой a (рис. 22).

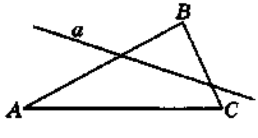


Рис. 21

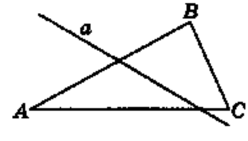


Рис. 22

7) В каждом из этих случаев прямая a пересекает только один из отрезков AC или BC.

4) Объяснить понятие *«аксиома»* на примерах известных учащимся основных свойств и понятие *«определение»* на примерах: отрезок и равные отрезки, угол и равные углы и т.д.

Примерное планирование изучения материала

Тематическое планирование дается в двух вариантах: первый — изучение темы *«Параллельные прямые»* проводится в соответствии с изложением учебного материала в учебнике; второй — изучение пункта 11 отнесено в § 4 к теме *«Параллельность прямых»*.

Вариант I. В классе изложить весь теоретический материал пунктов (§ 1, п. 11, 12 и 13), решить задачи 18(6), 41, провести самостоятельную работу по теме *«Откладывание отрезков и углов. Существование треугольника, равного данному»*; дома — вопросы 27–29, задачи 42, 25(3), 26(3, 4), 33, 34, и 43.

Вариант II. В классе изложить весь теоретический материал пунктов (§ 1, п. 12 и 13), решить задачу 18(6), провести самостоятельную работу по теме *«Откладывание отрезков и углов. Существование треугольника, равного данному»*; дома — вопросы 28, 29, задачи 25(3), 26(3, 4), 33, 34, и 43.

Указания к решению задач

Задачи 41, 42 в системе задач учебного пособия являются очень значимыми, так как доказательные рассуждения, используемые при решении этих задач, являются пропедевтикой к доказательствам теорем о *признаках параллельности прямых* и *свойствах углов при параллельных прямых* (теоремы 4.1 и 4.2 из § 4, п. 31, 32).

Задача 42. Обозначим точку пересечения прямых a и b через A (рис. 23). Предположим, что можно провести прямую c так, что $c \parallel a$, $c \parallel b$. Тогда получим, что через точку A, не лежащую на прямой c, проведены две прямые a и b, параллельные c, что противоречит основному свойству параллельных прямых.

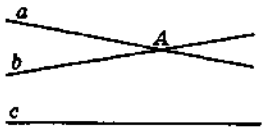


Рис. 23

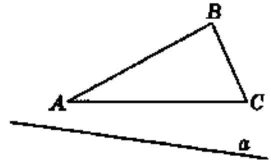


Рис. 24

Задача 43. Три вершины треугольника относительно прямой, не проходящей ни через одну из его вершин, могут быть расположены так, что:

1) все три вершины треугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой (рис. 24);

2) две вершины лежат в одной полуплоскости, а одна — в другой относительно прямой (рис. 25, 26).

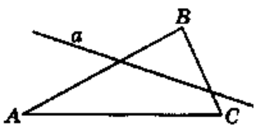


Рис. 25

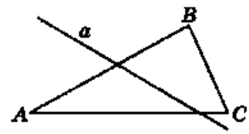


Рис. 26

В первом случае все три отрезка, концами которых служат вершины данного треугольника, лежат в одной полуплоскости, и, следовательно, прямая не пересекает ни одну из сторон треугольника (рис. 24). Во втором случае два отрезка (*AB* и *CB* на рис. 25) имеют своими концами вершины треугольника, лежащие в разных полуплоскостях, следовательно, прямая пересекает две стороны треугольника. А третья сторона не пересекается с данной прямой, так как две другие вершины *A* и *C* лежат в одной полуплоскости (рис. 26). Значит, прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, не может пересекать каждую его сторону.

Для второго случая расположения прямой и треугольника имеется и другое решение. Две вершины треугольника *A* и *B* (рис. 25) лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, т.е. прямая пересекает одну из сторон треугольника, следовательно, по теореме 1.1 она пересекает только одну из двух других сторон.

Первый вариант решения задачи дает возможность в ходе решения повторить обоснование, аналогичное обоснованию теоремы 1.1, т.е. способствует обучению школьников доказательным рассуждениям. Второй вариант решения позволяет непосредственно применить теорему 1.1, т.е. обучает школьников умению выделять ситуацию, позволяющую применить ранее изученные факты.

Задачи 44–51 являются задачами продвинутого уровня. Их можно использовать для дифференцированной работы или, если позволяет уровень подготовки класса, как для текущего повторения, так и для итогового повторения.

Задача 44. Допустим, что прямая, на которой лежат точки A, B и C, отлична от прямой, на которой лежат точки B, C и D. Это означает, что через две точки B и C проходят две различные прямые. По аксиоме I этого не может быть, следовательно, все четыре точки лежат на одной прямой.

Задача 45. Допустим, что точка пересечения прямых a, b и c отлична от точки пересечения прямых b, c и d. Но это значит, что через две различные точки проходят две различные прямые b и c, а это противоречит аксиоме I. Следовательно, все четыре прямые пересекаются в одной точке.

Задача 46. Прямая AB пересекает прямую CD в некоторой точке E отрезка CD. Прямая CD пересекает прямую AB в некоторой точке F отрезка AB. В силу задачи 3 две прямые могут пересекаться только в одной точке, следовательно, точки E и F совпадают, т.е. отрезки AB и CD пересекаются (рис. 27).

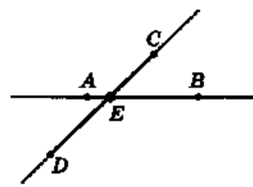


Рис. 27

Задача 47. Отрезок BC пересекает прямую AA_1, отсюда в силу аксиомы IV точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1. Точка B_1 разделяет точки A и C по условию, значит, точка A не разделяет точки B_1 и C (рис. 28) в силу аксиомы II. Прямая AC пересекается с прямой AA_1 в точке A, следовательно, точки B_1 и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AA_1. Отсюда следует, что точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1, а это значит, что отрезок BB_1 пересекает прямую AA_1. Аналогично доказывается, что отрезок AA_1 пересекает прямую BB_1. Следовательно, отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются (см. задачу 46).

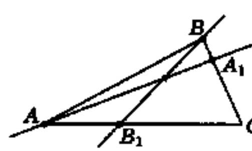


Рис. 28

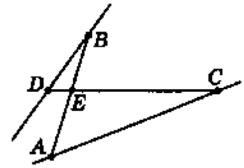


Рис. 29

Задача 48. Точка E принадлежит прямой AB, т.е. лежит между точками A и B (рис. 29). Тогда по аксиоме II точка B не лежит между точками A и E, т.е. не принадлежит отрезку AE. Отрезок AE лежит на прямой AB, которая пересекается с прямой BD в точке B. В силу задачи 3 две прямые могут пересекаться только в одной точке и точка их пересечения B не принадлежит отрезку AE, следовательно, отрезок AE не пересекает прямую BD. Тогда по аксиоме II точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой BD. Аналогичные рассуждения приводят к выводу, ,что точки C и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой BD, *а* значит, в силу свойства разбиения плоскости отрезок AC не пересекает прямую BD.

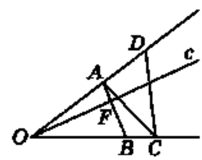


Рис. 30

Задача 49. Так как луч c выходит из вершины угла и пересекает отрезок AB, концы которого лежат на сторонах угла в точке F, то по определению луч c проходит между сторонами угла (рис. 30). Точки B и C лежат на одной прямой, а именно на стороне OB данного угла. Луч c пересекает сторону OB в точке O. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OF по аксиоме IV, а точки B и C в одной полуплоскости. Следовательно, луч c пересекает отрезок AC.

Задача 50. Предположим, что две различные прямые имеют две точки пересечения. Тогда через эти две точки проходили бы две различные прямые, что противоречит аксиоме I. Значит, две различные прямые, если пересекаются, то в одной точке. А если они не имеют точек пересечения, то они параллельны.

Решение задачи 51 аналогично решению задачи 30, приведенному в пункте «*Откладывание отрезков и углов*» на странице 13 учебника.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Основные свойства простейших геометрических фигур»

Комментарий для учителя

1) В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Основные свойства простейших геометрических фигур» учащиеся должны:

– распознавать и изображать на чертежах прямые, лучи, отрезки и углы;

– выделять из данной конфигурации заданные в условии задания элементы;

–применять при решении задач свойства измерения отрезков и углов;

– вычислять длины отрезков, градусную меру углов.

2) При подготовке к контрольной работе рекомендуется разобрать в классе решение задач 44 и 45. В зависимости от уровня подготовки класса подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи». Из них же составить домашнее задание.

Представляется полезным предложить учащимся выполнить тест 2,* рекомендованный для § 1 «Основные свойства простейших геометрических фигур» и направленный на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Сразу после выполнения теста следует разобрать решения его заданий с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задания 4, 5 и 8.

Заметим еще раз, что задание 4 теста будет успешно выполнено, если учащиеся усвоят, что при пересечении линии происходит переход из одной полуплоскости в другую и при этом, если число переходов четное, то мы остаемся в той же полуплоскости, с которой начинали движение, а при нечетном числе переходов — переходим в другую полуплоскость.

Форма задания 5 является нестандартной или, а, используя терминологию ЕГЭ — «измененная ситуация». Кроме того, среди ответов предлагается такая форма ответа «4. такая ситуация не-

* Т.И. Мищенко «Геометрия. Тесты. 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова — М.: Просвещение.

возможна». Поэтому здесь уместно объяснить учащимся, что значит ответ «4. такая ситуация невозможна».

Задание 8 по своей форме не является новым для учащихся, поскольку в курсе «Математики» они не однократно отвечали на вопрос: «Сколько решений имеет задача». Задачи такого типа будут повторяться во многих тестах.

Контрольная работа по теме «Основные свойства простейших геометрических фигур»

1-й вариант

1. На прямой последовательно отмечены четыре точки A, B, C и D. При этом два отрезка AD и BC расположены так, что их середины совпадают. Найдите длину отрезка AB, если $AD = 14$ см и $BC = 8$ см.

2. Из вершины развернутого угла (aa_1) в одну полуплоскость проведены лучи b и c. Определите, чему равен угол (bc), если $\angle(a_1b) = 55°$, $\angle(ac) = 82°$.

3. Дано: $\Delta ABC = \Delta PQR$, $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $AC = 10$ см. Найдите стороны треугольника PQR.

4. Даны четыре прямые a, b, c и d. Прямые a, b и c пересекаются в одной точке. Прямые b, c и d также пересекаются в одной точке. Определите, сколько точек пересечения имеют четыре прямые a, b, c и d.

5. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма длин которых равна 28 см так, что конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго — серединой третьего. Найдите длину меньшего отрезка.

2-й вариант

1. На прямой последовательно отмечены четыре точки A, B, C и D. При этом два отрезка AD и BC расположены так, что их середины совпадают. Найдите длину отрезка BD, если $AD = 14$ см и $BC = 8$ см.

2. Из вершины развернутого угла (aa_1) в одну полуплоскость проведены лучи b и c. Определите, чему равен угол (bc), если $\angle(ab) = 55°$, $\angle(ac) = 82°$.

3. Дано: $\Delta ABC = \Delta DEF$, $\angle A = 105°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$. Найдите углы треугольника DEF.

4. Даны четыре точки A, B, C и D. Точки A, B и C лежат на одной прямой a. Точки B, C и D также лежат на одной прямой b. Определите, взаимное положение прямых a и b.

5. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма длин которых равна 28 см, так, что конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго — серединой третьего. Найдите длину большего отрезка.

§ 2. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

В параграфе изучается материал, традиционный для любого курса планиметрии: смежные и вертикальные углы и их свойства, биссектриса угла, перпендикулярные прямые. Основную массу задач составляют задачи на вычисление градусных мер углов, имеющих общую вершину. Теоремы о смежных и вертикальных углах будет активно использоваться при изучении признаков равенства треугольников и в теме «Четырехугольники».

Понятия о смежных и вертикальных углах уже знакомы учащимся из курса математики V–VI классов. Поэтому основной задачей учителя является формирование у учащихся умений *использовать определения* и *свойства введенных фигур* при проведении доказательных рассуждений.

Следует иметь в виду, что этим параграфом начинается систематическое изучение теорем курса. При изучении § 1 учащиеся познакомились с аксиомами и некоторыми геометрическими понятиями, свойства которых описывались аксиомами.

Теоремы, вводимые в § 2, кроме своей основной роли в построении курса, позволяют начать с учащимися работу по формированию у них навыков доказательных рассуждений. При этом основным методом обучения является обучение по образцам.

Представляется полезным при решении каждой задачи, при доказательстве каждой теоремы просить учащихся приводить обоснования. Однако при этом не следует впадать в крайность и доводить обоснования непременно до исходной позиции (аксиомы) или требовать пояснения конфигурации, которая уже рассматривалась несколько раз и усвоена учащимися.

Рассматриваемый в этом параграфе способ доказательства от противного — один из часто употребляемых в геометрии способов дедуктивных рассуждений. Большая часть задач на доказательство из § 1 решалась именно этим методом.

Большинство задач, предлагаемых в параграфе, может быть решено без чертежа (это относится, в частности, ко всем задачам, решаемым составлением уравнения), однако необходимо решение каждой задачи сопровождать выполнением соответствующего чертежа. Это будет способствовать обучению школьников умению *выполнять чертеж по описанию*.

В параграфе широко используется обозначение углов посредством лучей, являющихся их сторонами. Угол, сторонами которого служат лучи a и b, обозначается $\angle(ab)$. Применение этого способа обозначения углов в данном параграфе обладает рядом преимуществ. В самом деле, определение как смежных, так и вертикальных углов опирается на понятие дополнительных полупрямых, которые обозначаются одной и той же буквой, но с различными индексами: a и a_1. При данном способе обозначения углов непосредственно из обозначения видно, что углы (ab) и (a_1b) смежные, причем луч b — их общая сторона, а углы (ab) и (a_1b_1) вертикальные. Это позволяет учащимся выполнить чертеж быстро и безошибочно.

Планируемые итоговые результаты изучения § 2

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках смежные и вертикальные углы, биссектрису угла, перпендикулярные прямые;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: смежные и вертикальные углы, биссектрису угла, перпендикулярные прямые;

– иллюстрировать и объяснять формулировки свойств смежных и вертикальных углов, перпендикулярных прямых;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения смежных и вертикальных углов, биссектрисы угла, перпендикулярных прямых;
- теоремы о свойствах смежных и вертикальных углов, перпендикулярных прямых.

Смежные углы

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пункта 14. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках смежные углы, прямые, тупые и острые углы;

– формулировать и объяснять определения смежных углов, прямого, тупого и острого углов;

– формулировать, объяснять и доказывать теорему о сумме смежных углов и следствия из теоремы о сумме смежных углов;

– решать задачи с использованием свойства смежных углов;

– объяснять термин «следствие из теоремы».

Методические рекомендации к изучению материала

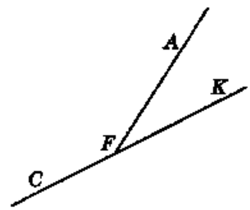


Рис. 31

1) Понятие *смежные углы* полезно ввести на наглядном уровне. Проведем прямую CK и отметим точку F, лежащую между точками C и K (рис. 31). Проведем луч FA. Получим два угла: $\angle CFA$ и $\angle AFK$. Такие углы называют *смежными углами*. Здесь следует обратить внимание на два важных момента: первое — наличие у углов общей стороны FA и второе — поскольку по построению FC и FK принадлежат одной прямой, то две другие стороны являются дополнительными полупрямыми.

После этого сформулировать определение смежных углов. Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *смежные углы* и умения находить их в стандартных ситуациях полезно выполнить работу по готовым чертежам, (например, как на рисунке 32, включив в их набор контрпример е):

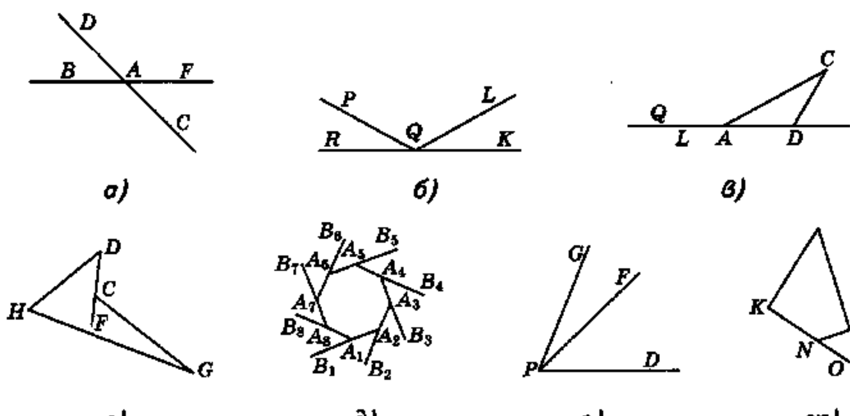


Рис. 32

1. На рисунках найдите пары смежных углов.
2. Объясните, почему эти углы являются смежными.
3. Определите, являются ли углы на рисунке 32, е) смежными и почему.

Вместе с данным в учебнике вербальным определением *смежных углов* полезно дать также их конструктивное определение, т.е. показать учащимся, что смежный угол можно построить путем дополнения одного из лучей, являющихся стороной данного угла до прямой. Для этого можно использовать следующее упражнение:

> **Дан угол *CGD*. Начертите угол, смежный с углом *CGD*. Сколько таких углов можно построить?**

Для того, чтобы показать учащимся, что смежные углы не абстрактная конструкция, можно предложить им найти смежные углы на фотографиях, помещенных на стр. 22 и 23.

> ***При использовании в учебном процессе рабочей тетради после записи определения* смежных углов *выполнить упражнения 78 и 79.***

2) Доказательство традиционной для любого курса геометрии теоремы *о сумме смежных углов*, как правило, не вызывает затруднений у учащихся.

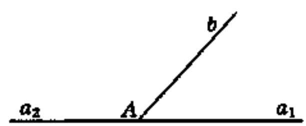


Рис. 33

Доказательство проводится с опорой на рисунок 33, примерно так:

Даны смежные углы (a_1b) и (a_2b) (рис. 33).

1) Луч b проходит между сторонами развернутого угла (a_1a_2), так как он исходит из вершины развернутого угла и отличен от его сторон.

2) По аксиоме измерения углов: $\angle(a_1a_2) = \angle(a_1b) + \angle(a_2b)$.

3) А поскольку градусная мера развернутого угла равна 180°, то $\angle(a_1b) + \angle(a_2b) = 180°$.

В качестве упражнений на закрепление теоремы можно предложить учащимся устно решить задачу 1 из учебника (§ 2, п. 14).

3) Прежде чем переходить к доказательству следствий из теоремы *о сумме смежных углов*, полезно объяснить учащимся, что словосочетание *«следствие из теоремы»* означают, что *сформулированное предложение должно доказываться со ссылкой только на данную теорему*. Учащиеся должны уметь воспроизводить доказательства следствий, поэтому, если учитель сочтет нужным, можно записать их в тетрадях.

Следствие 1. *Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.*

Доказательство. Обозначим величину каждого из равных углов через α. Так как сумма смежных углов равна 180°, то величины углов, смежных с равными углами a, равны $180° - a$ всегда.

Следствие 2. *Если угол не развернутый, то его градусная мера меньше* 180°.

Доказательство. Обозначим величину данного угла через α. Построим угол, смежный с углом α, и обозначим его через β. Так как сумма смежных углов равна 180°, то $\alpha = 180° - \beta$. Отсюда следует, что $\alpha < 180°$.

Следствие 3. *Угол, смежный с прямым углом, — прямой.*

Доказательство. Прямой угол равен 90°. Так как сумма смежных углов равна 180°, то величина угла, смежного с прямым, равна $180° - 90° = 90°$.

В качестве упражнений на закрепление следствий из теоремы и определений прямого, тупого и острого углов можно предложить учащимся устно решить задачу 2 из учебника (§ 2, п. 14), которая связывает понятие смежных углов и определения прямого, тупого и острого углов.

> *В рабочей тетради записать формулировку теоремы* о сумме смежных углов, *разобрать доказательство следствия 1, доказать следствия 2 и 3, записать определения* прямого, острого и тупого углов, *выполнить упражнения 80–87. При этом задачи, рекомендованные для решения в классе из учебника, заменяются аналогичными задачами из рабочей тетради, за исключением задачи 1 (§ 2, п. 14). В качестве упражнений, которые связывают понятие смежных углов и определения прямого, тупого и острого углов, в рабочей тетради предлагаются задачи 86 и 87.*

4) Проверку домашней работы на следующем уроке удобно организовать в виде самостоятельной работы в форме тестов не более, чем на 10 минут.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе изложить весь теоретический материал пункта 14, решить задачи 1, 2(1, 3) и 5(устно), 3, 4(2) (§ 2, п. 14); дома — вопросы 1–5; задача 2(2), 4(1, 3, 4) и 6(2, 3) (§ 2, п. 18).

Указания к задачам

Задачи 3, 4 и 6 решаются алгебраическим способом. Приведем в качестве образца оформления решения задачи 4 (рис. 30).

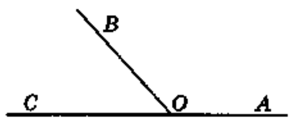


Рис.34

Дано: $\angle AOB$ и $\angle BOC$ смежные,
$\angle AOB$ больше $\angle BOC$ на 30°.

Найти: $\angle AOB$ и $\angle BOC$.

Решение.

1) Пусть $\angle BOC = x$, тогда $\angle AOB = x + 30°$. По теореме о сумме смежных углов $\angle AOB + \angle BOC = 180°$.

2) $x + x + 30 = 180°$; $2x = 180° - 30°$; $x = 75°$.

3) $\angle BOC = 75°$; $\angle AOB = 75° + 30° = 105°$.

Ответ: $\angle AOB = 105°$; $\angle BOC = 75°$.

Дополнительные задачи

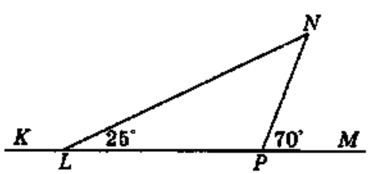


Рис.35

1. По рисунку 35 определите градусную меру углов KLN и LPN?

2. Углы DAB и DAF смежные. Угол DAB равен 57°. Чему равен $\angle DAF$?

3. Сумма двух углов равна 148°. Докажите, что эти углы не могут быть смежными.

Самостоятельная работа по теме «Смежные углы»

Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

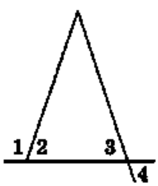
1-й вариант

1. Чему равен угол, если он на 37° больше смежного с ним угла?

Ответ: ______________________

2. Чему равен угол, если он в три раза меньше смежного с ним угла?

Ответ: ______________________



3. На рисунке: $\angle 1 = 163°$; $\angle 2 = \angle 3$. Найдите $\angle 4$.

Ответ: ______________________

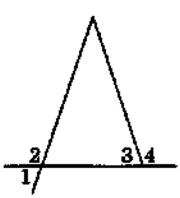
2-й вариант

1. Разность смежных углов равна 40°. Найдите величину меньшего угла.

Ответ: ______________________

2. Один из смежных углов в четыре раза больше другого. Найдите больший угол.

Ответ: ______________________



3. На рисунке: $\angle 2 = 107°$; $\angle 1 = \angle 3$. Найдите $\angle 4$.

Ответ: ______________________

Вертикальные углы

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пункта 15. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках вертикальные углы;

– формулировать и объяснять определение вертикальных углов;

– формулировать, объяснять и доказывать теорему о вертикальных углах;

– решать задачи с использованием теоремы о вертикальных углах и свойств смежных углов.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Ввести понятие *вертикальные углы* можно конструктивно. Нарисуем угол AMD (рис. 32). Дополним полупрямые MA и MD до прямых. Углы AMD и CMB называются *вертикальными углами*. При этом следует обратить их внимание на то важное обстоятельство, что полупрямые MA и MB, а также полупрямые MD и MC, по построению являются дополнительными полупрямыми.

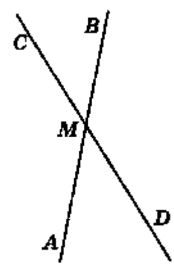


Рис.36

После этого сформулировать определение *вертикальных углов*. Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *вертикальные углы* и умения находить их в стандартных ситуациях можно предложить задания по готовым чертежам, например, как на рисунке 36, включив в их набор контрпример б):

1. На рисунке найдите пары вертикальных углов.
2. Объясните, почему эти углы являются вертикальными.

3. Определите, являются ли углы на рисунке 37, б) вертикальными и почему.

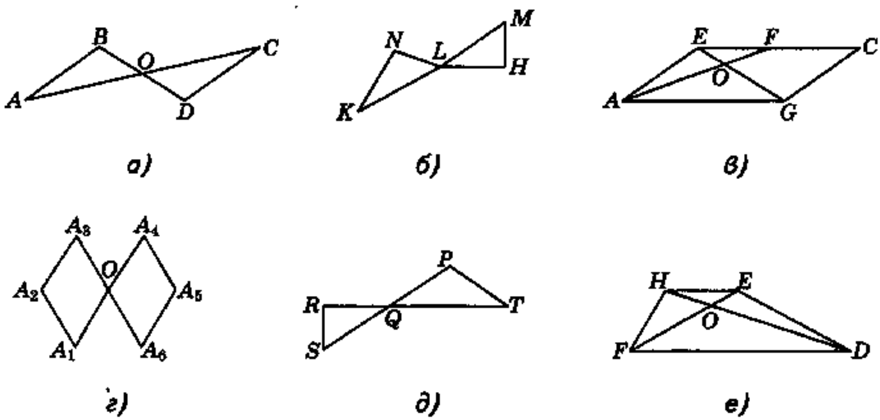


Рис.37

Кроме того, полезно предложить учащимся ответить на следующие вопросы:

> 1. Сколько пар вертикальных углов образуются при пересечении двух прямых?
> 2. Какие еще углы образуются при пересечении двух прямых?

Ответ на второй вопрос «*любые два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные*» довольно часто используется при решении задач, как один из логических шагов ее решения.

Для того, чтобы показать учащимся, что вертикальные углы не абстрактная конструкция, можно предложить им найти вертикальные углы на фотографиях, помещенных на стр. 23.

> *При использовании в учебном процессе рабочей тетради после записи определения* вертикальных углов *выполнить упражнения 88–91. Решение задачи 91 является пропедевтикой к доказательству теоремы о* равенстве вертикальных углов. *Комментарии к нему приведены ниже.*

2) Доказательство теоремы *о равенстве вертикальных углов* можно начать с решения задачи.

> По данным рисунка 38 вычислите углы (a_1b_1) и (a_2b_2), если угол (a_1b_2) равен 147°.

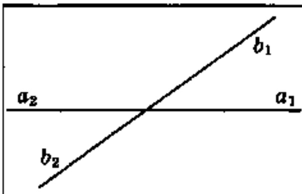


Рис. 38

Решение (рис. 38).

1. $\angle(a_1b_2) + \angle(a_1b_1) = 180°$, так как $\angle(a_1b_2)$ и $\angle(a_1b_1)$ смежные.
2. Отсюда $\angle(a_1b_1) = 180° - 147° = 33°$.
3. $\angle(a_2b_2) = 180° - 147° = 33°$, так как $\angle(a_1b_2)$ и $\angle(a_2b_2)$ смежные.
4. Значит, $\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2) = 33°$.

В данном случае $\angle(a_1b_1)$ и $\angle(a_2b_2)$ являются *вертикальными углами* и они равны. Следует обратить внимание учащихся на то, что при решении задачи мы пользовались тем, что данный нам в условии $\angle(a_1b_2)$ оказался смежным с каждым из вертикальных углов. Доказательство теоремы *о равенстве вертикальных углов* можно предложить учащимся провести самостоятельно в качестве домашнего задания.

На непосредственное применение теоремы *о равенстве вертикальных углов* решить с учащимися устно задачу 7 (§ 2, п. 15). По тексту учебника разобрать решение задачи 9 (§ 2, п. 15) и решить задачу 12 (§ 2, п. 15).

> *В рабочей тетради прочитать формулировку теоремы* о равенстве вертикальных углов, *выполнить упражнение 92, 93. Вместо того чтобы по тексту учебника разбирать решение задачи 9 (§ 2, п. 15), можно предложить учащимся разобрать решение задачи 94 из рабочей тетради. Задачу же 9 (§ 2, п. 15) предложить для самостоятельной работы дома.*

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе провести самостоятельную работу; изложить весь теоретический материал пункта (§ 2, п. 15); решить задачи 7 (устно), 9 и 12; дома — вопросы 6, 7; задача 8, 10 и 11.

Дополнительные задачи

1. Отметьте три точки, не лежащие на одной прямой. Проведите через каждые две из них прямую. Укажите пары получившихся вертикальных углов.

2. Три пересекающиеся в одной точке прямые образуют шесть углов. Два из них равны 30° и 34°. Чему равны остальные углы?

Перпендикулярные прямые. Доказательство от противного. Биссектриса угла

Комментарий для учителя

Текущие результаты изучения пунктов16, 17, 18. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках перпендикулярные прямые, перпендикуляр к прямой и биссектрису угла;

– формулировать и объяснять определение перпендикулярных прямых, перпендикуляра к прямой и биссектрисы угла;

– формулировать, объяснять и доказывать теорему о прямой, перпендикулярной данной;

– решать задачи с использованием теоремы о прямой, перпендикулярной данной, и определения биссектрисы угла;

– применять метод доказательства от противного.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Перед введением определения *перпендикулярных прямых* можно предложить учащимся решить устно по готовому чертежу задачу:

> Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *O* (рис. 39). Угол *COB* прямой. Найдите остальные углы. Сделайте вывод.

Решение. Углы *AOD* и *COB* вертикальные; следовательно, они равны; значит, $\angle AOD$ прямой. Углы *COA* и *BOD* смежные с углом *COB*, а угол, смежный с прямым углом, тоже прямой. Значит, углы *COA* и *BOD* прямые.

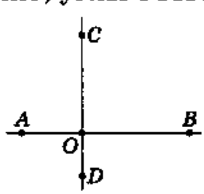


Рис. 39

<u>Вывод:</u> *если в пересечении двух прямых один из углов прямой, то остальные три угла тоже прямые.*

Введенное в пункте понятие *перпендикуляра к прямой* находит применение непосредственно в следующем параграфе при определении высоты треугольника и позднее, в курсе VIII класса.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся задание 95. После чего записать определение перпендикулярных прямых *и формулировку теоремы* о прямой, перпендикулярной данной.

2) Следует обратить внимание учащихся на то, что теорема о *прямой, перпендикулярной данной* (*Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну*), содержит два утверждения:

1. существование перпендикулярной прямой: *через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую*,
2. единственность: *через каждую точку прямой можно провести только одну перпендикулярную ей прямую.*

Поэтому доказательство каждой части теоремы целесообразно провести отдельно, как самостоятельную теорему. Заметим, что при доказательстве используются разные методы: первая часть доказывается *конструктивно*, а вторая часть — *методом от противного*. Перед доказательством второй части теоремы *о прямой, перпендикулярной данной*, нужно объяснить учащимся, что доказательство будет проводиться методом *доказательства от противного*, и четко выделить каждый шаг в доказательстве.

Так как доказательство теоремы *о прямой, перпендикулярной данной*, достаточно трудно для восприятия учащихся, то лучше провести его полностью самому учителю. Включение учащихся во фронтальную работу при разборе теоремы может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от школьников ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

1-я часть. *Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую.*

Строить такую прямую с помощью угольника или транспортира учащиеся умеют. Именно идея построения и лежит в основе доказательства. Представляется полезным, поскольку доказательство конструктивно, проводить его одновременно с построением чертежа.

Доказательство. Нам дана прямая a и на ней точка A (рис. 40, а). Обозначим через a_1 полупрямую прямой a с начальной точкой A (рис. 40, б). Отложим от полупрямой a_1 угол

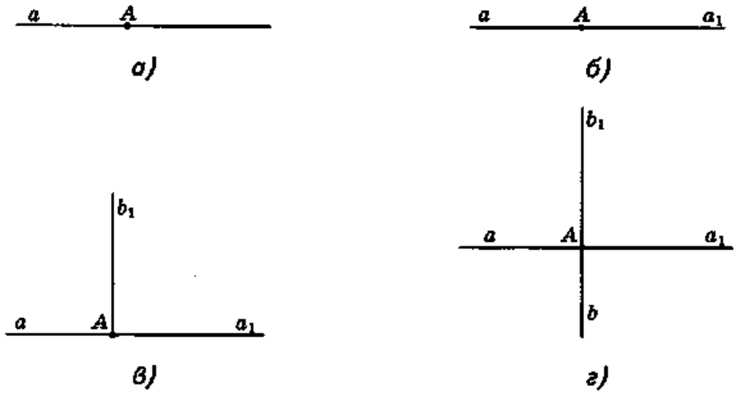


Рис. 40

(a_1b_1), равный 90° (рис. 40, в). Продолжим вторую сторону построенного прямого угла, т.е. полупрямую b_1, за точку A. Полученная прямая b перпендикулярна прямой a (рис. 40, г).

<u>2-я часть.</u> *Через каждую точку прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной.*

<u>Доказательство.</u> Одна прямая, перпендикулярная прямой a, уже построена — это прямая b (рис. 41). Допустим, что существует еще одна прямая, перпендикулярная a и проходящая через точку A, — прямая c. Обозначим через c_1 полупрямую прямой c с начальной точкой A и лежащую в одной полуплоскости с лучем b_1. Но это будет означать, что в одну полуплоскость отложены два угла: (ab_1) и (ac_1), каждый из которых равный 90°, что невозможно согласно аксиоме откладывания углов.

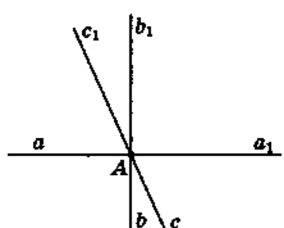


Рис. 41

Следует обратить внимание учащихся на то, что если в доказательстве первой части теоремы выбор полуплоскости был произвольным, то при доказательстве второй части теоремы луч c_1 надо взять на прямой c так, чтобы он лежал в одной полуплоскости с лучом b_1.

3) Изложение *метода доказательства от противного* полезно организовать, как естественное продолжение разговора о теореме *о прямой, перпендикулярной данной.*

После доказательства второй части теоремы *о прямой, перпендикулярной данной,* полезно проанализировать схему рассуждений и заметить, что *метод доказательства от противного* состоит из следующих шагов:

1) делаем предположение, противоположное тому, что надо доказать, т.е. заключение теоремы заменяется его отрицанием;

2) проводим рассуждения, опираясь на аксиомы и теоремы;

3) приходим к противоречию либо с условием задачи (теоремы), либо с одной из аксиом или ранее доказанных теорем, либо с определением какого-то понятия. Например:

> Сумма двух углов, образованных пересечением двух прямых, равна 148°. Докажите, что эти углы не могут быть смежными.

Доказательство.

1) Предположим, что $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ — смежные.

2) По теореме о смежных углах $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$, а по условию задачи $\angle\alpha + \angle\beta = 148°$.

3) Приходим к противоречию. Значит, $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ не являются смежными углами.

Поскольку при применении *метода доказательства от противного* заключение теоремы заменяют его отрицанием и путем логических рассуждений приходят к противоречию с условием доказываемого утверждения либо к противоречию с аксиомой или ранее доказанной теоремой, то одним из важных навыков способствующих формированию умения применять метод *доказательства от противного* является умение выделять условие и заключение данного утверждения.

> *В рабочей тетради предложить учащимся разобрать решение задачи 96, после чего, рассмотрев по выше предложенной схеме сущность метода доказательства от противного, выполнить упражнения 97, 98.*

4) Определение биссектрисы угла, данное в учебном пособии:

«Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол попо-

лам», является избыточным, так как условие *«луч исходит из вершины угла»*, входит в определение луча, проходящего между сторонами угла. В дальнейшем при решении задач учащиеся будут пользоваться сокращенным определением, включающим два условия: *«Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины и делит угол пополам»*. Условие *«проходит между его сторонами»* используется для полного обоснования достаточно тонких теоретических вопросов (типа обоснования решения задач 18 и 19 (§ 2, п. 18). Проведение таких обоснований можно требовать только от сильных учащихся.

После введения понятия *биссектрисы угла* можно предложить учащимся устно с выполнением чертежа на доске решить задачи: 15(1, 3), 16(1), 21(1, 3) из учебника (§ 2, п. 18).

2) Прежде чем по тексту учебника разбирать решение задачи 17 полезно предложить учащимся решить следующую задачу:

> Докажите, что градусная мера любого угла не может превосходить 180°.

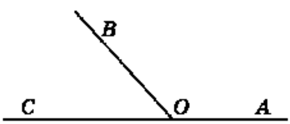


Рис. 42

Доказательство. В самом деле, пусть дан произвольный угол AOB (рис. 42). Достроим любую его сторону, например AO, до прямой. Получим смежные углы AOB и BOC. Следовательно, $\angle AOB + \angle BOC = 180°$. Но $\angle AOB > 0$, значит, $\angle BOC < 180°$.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить учащимся записать определение* биссектрисы угла. *После чего выполнить задания 99 и 100, которые являются аналогами задач 15 и 16 из учебника (§ 2, п. 18).*

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе изложить весь теоретический материал пунктов 16, 17 и 18; решить задачи: 15(1, 3) (устно), 16(1) (устно), 17, и 21(1, 3) (устно) (§ 2, п. 18); дома — вопросы 8–13, задачи 13, 14(устно) (§ 2, п. 16), 15(2), 16(2, 3), 19, 20, и 21(2) (§ 2, п. 18).

Указания к задачам

18. По условию $\angle(ac) = \angle(bc)$, требуется доказать, что луч c — биссектриса угла (ab). Рассмотрим возможные положения для этого луча в случае острого и тупого угла (ab) (рис. 43).

Рис. 43

Пусть данный угол (ab) острый и луч c не проходит между сторонами данного угла, тогда либо сторона a проходит между сторонами угла (bc) либо сторона b проходит между сторонами угла (ac). Рассмотрим второй случай (рис. 43, а). По аксиоме измерения углов: $\angle(ac) = \angle(ab) + \angle(cb)$, т.е. $\angle(ac) > \angle(cb)$. Пришли к противоречию с условием задачи $(ac) = (bc)$. Аналогично доказывается, что сторона a не проходит между сторонами угла (bc). Значит, луч c, выходящий из вершины угла и образующий с его сторонами равные острые углы, проходит между сторонами данного угла и по определению является биссектрисой $\angle(ab)$.

19. Даны смежные углы (a_1b) и (ab), а c_1 и c — их биссектрисы (рис. 44). Обозначим угол (ab) через x, тогда угол (a_1b) равен $180° - x$. Лучи c_1 и c лежат в разных полуплоскостях относительно луча b. Лучи c_1, c и b исходят из одной точки O. Значит, луч b проходит между сторонами угла (c_1c) и по аксиоме измерения углов: $\angle(c_1c) = \angle(c_1b) + \angle(cb)$. А так как c_1 и c — биссектрисы, соответственно, углов (a_1b) и (ab), то $\angle(c_1b) = \dfrac{1}{2}(180° - x)$, а

$\angle(cb) = \dfrac{1}{2}x$. Отсюда $\angle(c_1c) = 90°$.

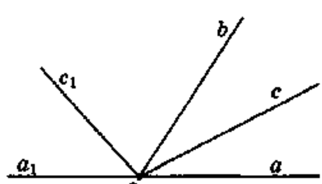


Рис. 44

20. Даны вертикальные углы (ab) и (a_1b_1), а c и c_1 — их биссектрисы (рис. 45). Обозначим угол (ab) через x, тогда угол (a_1b_1) также равен x, а угол (ab_1) равен $180° - x$. А так как c и c_1 — биссектрисы, соответственно, углов (ab) и (a_1b_1), то $\angle(ac) = \frac{1}{2}x$ и $\angle(c_1b_1) = \frac{1}{2}x$. Тогда по аксиоме измерения углов: $\angle(c_1c) = \angle(ac) + \angle(ab_1) + \angle(c_1b_1) = \frac{1}{2}x + (180° - x) + \frac{1}{2}x$. Отсюда $\angle(c_1c) = 180°$. Следовательно, биссектрисы вертикальных углов (ab) и (a_1b_1) лежат на одной прямой.

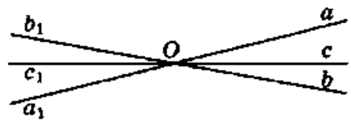


Рис. 45

23. 1) <u>Дано</u>: $\angle(ab) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$, лучи b и c в одной полуплоскости. Определите $\angle(bc)$ (рис. 46).

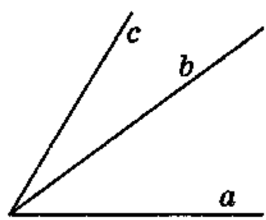


Рис. 46

Решение. Углы (ab) и (ac) отложены от полупрямой a в одну полуплоскость, и $\angle(ab) < \angle(ac)$; Докажем, что луч b проходит между сторонами угла (ac). Пусть луч b не проходит между сторонами данного угла. Тогда либо луч c проходит между сторонами угла (ab), либо луч a проходит между сторонами угла (bc). Рассмотрим первый случай. По аксиоме измерения углов: $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$, т.е. $\angle(ac) > \angle(ab)$. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что и сторона a не проходит между сторонами угла (bc). Значит, луч b проходит между сторонами угла (ac). Но тогда градусная мера угла (ac) равна сумме градусных мер углов (ab) и (bc): $70° = 50° + \angle(bc)$, $\angle(bc) = 20°$.

2) Дано: $\angle(a_1b) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$, лучи b и c в одной полуплоскости. Определите $\angle(bc)$ (рис. 47).

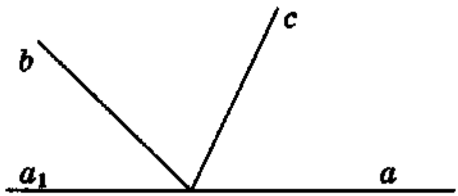


Рис. 47

Решение. Лучи b и c в одной полуплоскости, но $\angle(a_1b)$ и $\angle(ac)$ не имеют общей стороны. Поэтому вместо одного из углов надо рассмотреть угол, смежный с ним. Например, угол $(ab) = 180° - \angle(a_1b)$. Решение аналогично решению задачи 23, 1).

Дополнительные задачи

1. Даны три точки A, B и C такие, что $AB = 10$ см, $BC = 3$ см, $AC = 8$ см. Докажите, что ни одна из трех точек A, B и C не лежит между двумя другими.

2. Сумма двух углов равна 76°. Докажите, что эти углы не смежные.

3. Разность двух углов равна 18°. Могут ли эти углы быть вертикальными?

4. Сумма двух углов равна 160°. Могут ли эти углы быть смежными?

5. Сумма трех углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 300°. Найдите эти углы.

6. Один из углов, получившихся при пересечении двух прямых, в 19 раз больше смежного с ним. Определите получившиеся углы.

7. Один из смежных углов на 32° больше другого. Вычислите меньший угол.

8. Из вершины развернутого угла (a_1a); проведены в одну полуплоскость лучи b и c. Чему равен угол (bc), если:

а) $\angle(ab) = 100°$, $\angle(ac) = 20°$;
б) $\angle(ab) = 40°$, $\angle(ac) = 135°$?

Систематизация и обобщение знаний по теме «Смежные и вертикальные углы»

Комментарий для учителя

1) В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Смежные и вертикальные углы» учащиеся должны:

– распознавать и изображать на чертежах смежные и вертикальные углы;

– выделять из данной конфигурации заданные в условии задания элементы;

– применять при решении задач определения смежных и вертикальных углов и теоремы о смежных и вертикальных углах;

– вычислять градусную меру смежных и вертикальных углов.

2) При подготовке к контрольной работе подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса. Из них же составить домашнее задание.

> ***При подготовке к контрольной работе рекомендуется разобрать в классе решение задач 101 и 102 из рабочей тетради.***

Можно предложить учащимся выполнить тест 3*, рекомендованный для § 2 «Смежные и вертикальные углы» и направленный на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Сразу после выполнения теста следует разобрать решения его заданий с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задания 7 и 8, в которых проводятся рассуждения, аналогичные для отрезков и углов.

* Т.М. Мищенко. «Геометрия. Тесты 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова» — М.: «Просвещение»

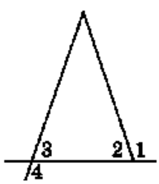
3) В контрольной работе первые две задачи — это задача с выбором ответа и задача со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 3–5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

Контрольная работа по теме «Смежные и вертикальные углы»

1-й вариант

1. Углы *AOB* и *BOC* смежные, причем угол *AOB* на 18° больше угла *BOC*. Найдите больший из углов.

1. 110°; **2.** 162°; **3.** 81°; **4.** 99°.



2. На рисунке: $\angle 2 = \angle 3$. Найдите $\angle 4$, если $\angle 2 = 64°$.

Ответ: ______________________

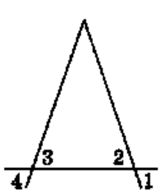
3. Разность двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 178°. Вычислите все углы, получившиеся при пересечении этих прямых.

4. Определите, какой угол образуют биссектрисы двух углов, смежных с данным.

5. Известно, что $\angle AOC = 75°$, $\angle BOC = 105°$. Определите, являются ли эти углы смежными или вертикальными.

2-й вариант

1. Углы *AOB* и *BOC* — смежные, причем $\angle AOB$ в четыре раза больше $\angle BOC$. Найдите меньший из углов.



2. На рисунке $\angle 2 = \angle 3$. Найдите $\angle 4$, если $\angle 1 = 56°$.

Ответ: ______________________

3. Сумма двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 178°. Вычислите все углы, получившиеся при пересечении этих прямых.

4. Определите, какой угол образуют биссектрисы четырех углов, получающихся при пересечении двух прямых.

5. Известно, что $\angle MOK = \angle NOL = 114°$. Определите, являются ли эти углы смежными или вертикальными.

§ 3. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Признаки равенства треугольников вместе с материалом главы «Параллельные прямые» и теоремой «Сумма углов треугольника» занимают центральное место не только в курсе VII класса, но во всем курсе геометрии. При изучении темы формируется умение доказывать равенство треугольников с опорой на признаки равенства треугольников.

Использование *признаков равенства треугольников* является одним из главнейших методов доказательства теорем и решения задач во всем курсе геометрии. Поэтому они должны усваиваться учащимися в процессе решения задач. При этом закрепляются формулировки теорем и формируются умения доказывать равенство треугольников, т.е. выделять по три соответственно равных элемента данных треугольников и делать ссылки на изученные признаки.

Треугольник является одной из основных фигур планиметрии. Изучением свойств и признаков равнобедренных треугольников начинается изучение свойств треугольников различных видов. Кроме того, использование свойств равнобедренных и равносторонних треугольников позволяет расширить класс задач для отработки признаков равенства треугольников. Причем задачи становятся более сложными и интересными. Поиск одного или двух из трех равных элементов может проводиться с опорой на свойства и признаки равнобедренных треугольников и определения высоты, медианы и биссектрисы треугольника. Таким образом, учащиеся приобретают такое важное умение, как умение анализировать условие задачи, т.е. определять, что требуется для доказательства того или иного утверждения и ссылаться на необходимую теорему или определение.

В процессе изучения темы можно не требовать от учащихся воспроизведения доказательств признаков равенства треугольников. Полезно уделить внимание использованию наглядных средств обучения и решению задач по готовым чертежам.

Планируемые итоговые результаты изучения третьего параграфа.

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: равнобедренные треугольники, равносторонние треугольники; высоту, медиану и биссектрису треугольника;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи: равные треугольники, равнобедренные и равносторонние треугольники, высоты, медианы и биссектрисы треугольников;

– иллюстрировать и объяснять формулировки: признаков равенства треугольников, свойств равнобедренных и равносторонних треугольников, признака равнобедренного треугольника;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения равнобедренного и равностороннего треугольников; высоты, медианы и биссектрисы треугольника;
- признаки равенства треугольников, теоремы о свойствах равнобедренного треугольника;

– объяснять термины «прямая и обратная теоремы».

Первый и второй признаки равенства треугольников

Комментарий для учителя

Доказательства *первого и второго признаков равенства треугольников*; а также их применение к решению задач практически аналогичны. Опыт показывает, что изучение *второго признака равенства треугольников*, используя эту аналогию, приводит к лучшему усвоению обоих признаков равенства треугольников учащимися. Кроме того, после изучения доказательства *второго признака равенства треугольников* учащиеся лучше понимают метод доказательства, который использовался при изучении и *первого признака равенства треугольников*. Решения задач, в ходе которых проводятся доказательные рассуждения, также способствуют усвоению учащимися *первого и второго признаков равенства треугольников*. В связи с этим представляется целесообразным провести контроль за умением применять *первый и второй признаки равенства треугольников* после рассмотрения обеих теорем. Для формирования умения применять *признаки равенства треугольников* полезно достаточно раннее решение задач на оба признака, а не последовательная отработка применения *первого признака равенства треугольников*, а затем *второго*. Поэтому можно рекомендовать привести изучение первых двух *признаков равенства треугольников* компактно: первый урок — изучение *первого признака равенства треугольников*; второй урок — изучение *второго признака равенства треугольников* — один урок; и третий урок — на решение задач на применение *первого и второго признаков равенства треугольников.*

Заметим, что в методических рекомендациях изложение доказательств этих теорем приводится более подробно по сравнению с учебником. Это сделано для того, чтобы привлечь внимание учащихся к полному доказательству. Однако при ответах учащихся не следует в обязательном порядке требовать более детальных обоснований по сравнению с учебником.

Текущие результаты изучения пунктов 20–22. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках треугольники, равные по первому и второму признакам равенства треугольников, используя обозначения равных элементов или известные свойства фигур;

– формулировать и объяснять формулировки первого и второго признаков равенства треугольников;

– доказывать (требование только для сильных учащихся) первый и второй признаки равенства треугольников;

– решать задачи с использованием первого и второго признаков равенства треугольников.

Методические рекомендации к изучению материала

1) В доказательстве, как *первого*, так и *второго признаков равенства треугольников*, используются ссылки на определения и аксиомы. Поэтому перед началом объяснения формулировок и доказательства теорем целесообразно повторить с учащимися эти определения и аксиомы. При этом полезно в виде рисунков зафиксировать их на доске или плакате и сохранять до конца работы над каждой из теорем (рис. 48):

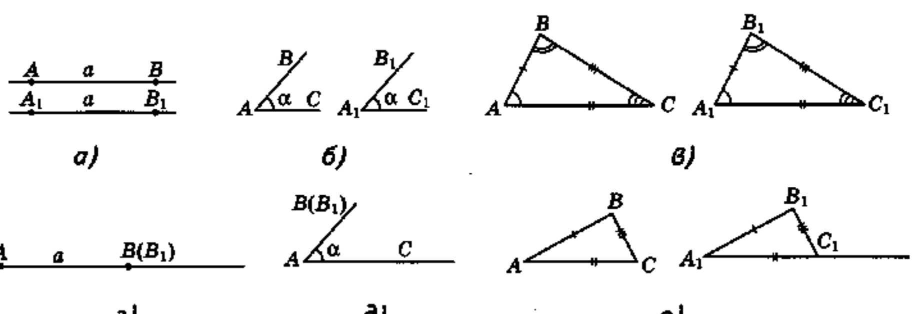


Рис. 48

1. определение равенства отрезков (рис. 48, а),
2. определение равенства углов (рис. 48, б),
3. определение равенства треугольников (рис. 48, в),
4. аксиома откладывания отрезков (рис. 48, г)
5. аксиома откладывания углов (рис. 48, д),
6. аксиома существования треугольника, равного данному (рис. 48, е).

2) Так как доказательство первого признака равенства треугольников длинное и достаточно трудное, то его лучше провести полностью самому учителю. Включение же учащихся во фронтальную работу при первичном разборе теоремы может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от учащихся ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

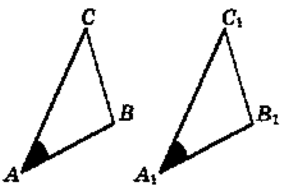


Рис. 49

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 49. При этом полезно выделить в треугольниках соответственно равные элементы более жирным изображением или цветом. При этом полезно напомнить учащимся, как с помощью штрихов и дужек обозначаются равные стороны и углы треугольников, и выполнить чертеж 50 по условию теоремы с краткой записью условия и заключения теоремы.

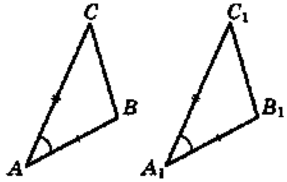


Рис. 50

Дано: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$ (рис. 50).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

1. По аксиоме *существования треугольника, равного данному*, существует треугольник $A_1B_2C_2$, равный треугольнику ABC, у которого вершина A_1 совпадает с вершиной A_1 треугольника $A_1B_1C_1$, вершина B_2 лежит на луче A_1B_1, а вершина C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где находится вершина C_1 (рис. 51, а).

Из условия теоремы для $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC: $A_1B_1 = AB$, $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, $A_1C_1 = AC$.

Из равенства $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$: $A_1B_2 = AB$, $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$, $A_1C_2 = AC$.

2. Так как $A_1B_1 = AB$ и $A_1B_2 = AB$, то $A_1B_1 = A_1B_2$, и отложены на полупрямой A_1B_1 от ее начала — точки A_1, значит, по *аксиоме откладывания отрезков*, вершина B_2 совпадает с вершиной B_1 (рис. 51, б).

3. Так как $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ и $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$, то $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ и отложены от полупрямой A_1B_1 в одну полуплоскость, тогда по аксиоме *откладывания углов* луч A_1C_2 совпадает с лучем A_1C_1 (рис. 51, в). Значит, точка C_2 лежит на луче A_1C_1.

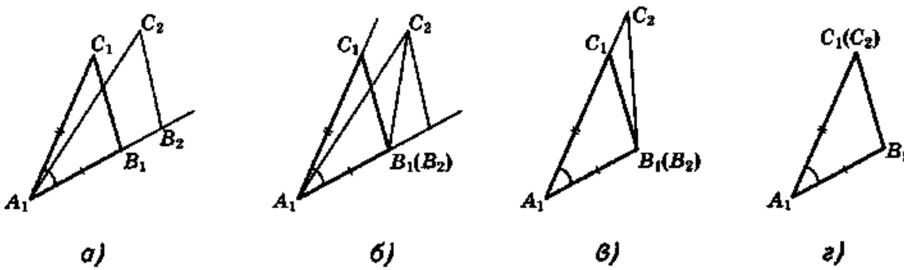


Рис. 51

4. Так как $A_1C_1 = AC$ и $A_1C_2 = AC$, то $A_1C_1 = A_1C_2$ и отложены на одной полупрямой A_1C_1 от ее начала— точки A_1, тогда по аксиоме *откладывания отрезков*, вершина C_2 совпадает с вершиной C_1 (рис. 51, г).

После совпадения всех трех вершин делается вывод о равенстве треугольников. Однако при этом пропускается обоснование того факта, что сторона C_2B_2 совпадает со стороной C_1B_1, т.к. *через две* совпавшие *точки* (C_2 с C_1 и B_2 с B_1) *можно провести только одну прямую* и, значит, стороны CB и C_1B_1 совпадают.

5. Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, равным треугольнику ABC по аксиоме *существования треугольника равного данному*, а значит, равен треугольнику ABC.

При решении задач довольно часто из равенства треугольников делают вывод о равенстве его элементов, т.е. по трем заданным элементам устанавливается равенство не входящих в эту тройку элементов. Поэтому после доказательства теоремы полезно привлечь внимание учащихся к тому факту, что если доказано $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, по *первому признаку равенства треугольников* ($AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$), то отсюда следует, что $CB = C_1B_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку первого признака равенства треугольников.

2) Обучение применению *первого признака равенства треугольников* желательно начать с обучения школьников <u>умению</u> выделять три равных элемента данных треугольников в соответствующей конфигурации по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 52, сопровождая работу по ним вопросами:

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.
2. Почему эти треугольники равны?

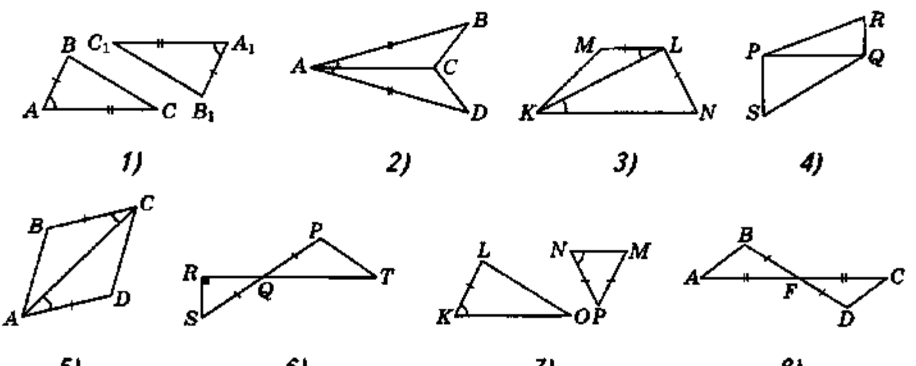


Рис. 52

При работе с рабочей тетрадью после доказательства первого признака равенства треугольников, проведенного учителем, выполнить задание 103, которое является полным аналогом работы с плакатом, но не требует от учителя значительных затрат времени на изготовление плаката. Затем предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи 104 и по аналогии решить задачи 105 и 106.

После работы с плакатом полезно разобрать с учащимися по тексту учебника решение задачи 1, а затем выполнить задания по готовому чертежу, используя упражнение 1 и 4 из дополнительных задач. Решение одной из этих задач полезно записать полностью в тетрадях учащихся, остальные — решить устно. Например, решение задачи 4 из дополнительных задач:

Докажите, что если $\Delta ABC = \Delta ADC$, то и $\Delta AKD = \Delta AKB$ (рис. 53).

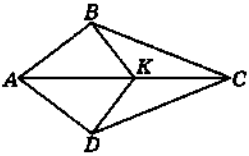


Рис. 53

Дано: $\Delta ABC = \Delta ADC$.

Доказать: $\Delta AKD = \Delta AKB$ (Рис. 53).

Решение

Рассмотрим ΔAKD и ΔAKB:

$AB = AD$, так как $\Delta ABC = \Delta ADC$.

$\angle BAK = \angle DAK$, так как $\Delta ABC = \Delta ADC$.

AK — общая сторона.

Следовательно, $\Delta AKD = \Delta AKB$ по двум сторонам и углу между ними.

Следует при этом обратить внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *первый признак равенства треугольников* должна быть именно в такой форме: *«по двум сторонам и углу между ними»*. Однако, вообще говоря, возможны и другие формы ссылки, например, полная формулировка или указание номера признака.

Учителю при решении задач необходимо уделить внимание работе с рисунками, научить школьников отмечать на рисунках равные элементы по условию задачи и находить равные элементы по рисунку с пометками при решении задач по готовому чертежу. На задачах, которые решаются письменно, полезно показать учащимся примеры оформления письменного решения и поощрять рациональные, лаконичные записи решения задач.

В дополнительные задания включены задачи 16 и 17, в которых даны избыточные данные. Эти задачи удобно использовать для проверках знаний учащихся в тестовом формате. Избыточные данные в условии задачи позволяют определить: действительно ли ученик устанавливает равенство треугольников и правильно ли определяет соответственно равные элементы. Поэтому после решения задачи 4 нужно решить задачу 16 и прокомментировать ее условие.

Задача 107 из рабочей тетради и задача 4 из дополнительных задач методических рекомендаций являются одной и той же задачей. В тетради приведено ее решение, которое рекомендуется учащимся разобрать самостоятельно. Затем можно предложить учащимся решить задачу 108. Затем рекомендуется обсудить задачу 109, в ус-

ловии которой даны избыточные данные. Использование в данной теме рабочей тетради позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также время на самом уроке и выполнить большее число заданий с записью в тетради. А у школьников будет хороший конспект урока, который, несомненно, поможет при выполнении домашнего задания.

3) Так же как и при изучении *первого признака равенства треугольников*, лучше будет самому учителю дать полное доказательство теоремы. Однако, так как доказательство *второго признака равенства треугольников* аналогично первому, то можно провести его и фронтально при условии, что уровень геометрической подготовки и темп работы класса позволяют это сделать. При этом фактически происходит повторение доказательства *первого признака равенства треугольников*. В ходе доказательства *второго признака равенства треугольников*, следует явно указать на имеющуюся аналогию с доказательством *первого признака равенства треугольников*: первые три шага в доказательствах полностью совпадают.

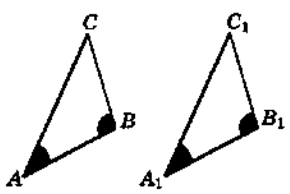


Рис. 54

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 54. По ходу формулировки теоремы внимание учащихся акцентируется на данные в условии теоремы три пары соответственно равных элементов треугольников.

Изложение доказательства *второго признака равенства треугольников*, как и изложение *первого признака равенства треугольников*, необходимо начать с краткой записи условия теоремы и выполнения чертежа 55:

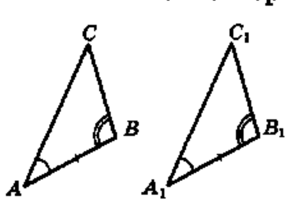


Рис. 55

Дано: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$
$AB = A_1B_1$

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

1. По аксиоме *существования треугольника, равного данному*, существует треугольник $A_1B_2C_2$, равный треугольнику ABC, у которого вершина A_1 совпадает с вершиной A_1 треугольника $A_1B_1C_1$, вершина B_2 лежит на луче A_1B_1, а вершина C_2 в той же по-

луплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1 (рис. 56, а).

Для проведения обоснования того, что $\Delta A_1B_2C_2$ и $\Delta A_1B_1C_1$ совпадают, полезно, как и при доказательстве первого признака равенства треугольников, выписать на доске равенства соответствующих элементов, взятые из условия теоремы и вытекающие из равенства $\Delta A_1B_2C_2$ и ΔABC:

из условия теоремы для $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC: $A_1B_1 = AB$, $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, $A_1C_1 = AC$;

из равенства $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$: $A_1B_2 = AB$, $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$, $A_1C_2 = AC$.

2. Так как $A_1B_1 = AB$ и $A_1B_2 = AB$, то $A_1B_1 = A_1B_2$, и отложены на полупрямой A_1B_1 от ее начала — точки A_1, значит, по *аксиоме откладывания отрезков*, вершина B_2 совпадает с вершиной B_1 (рис. 56, б).

3. Так как $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ и $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$, то $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ и отложены от полупрямой A_1B_1 в одну полуплоскость, тогда по аксиоме *откладывания углов* луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1 (рис. 56, в). Значит, точка C_2 лежит на луче A_1C_1.

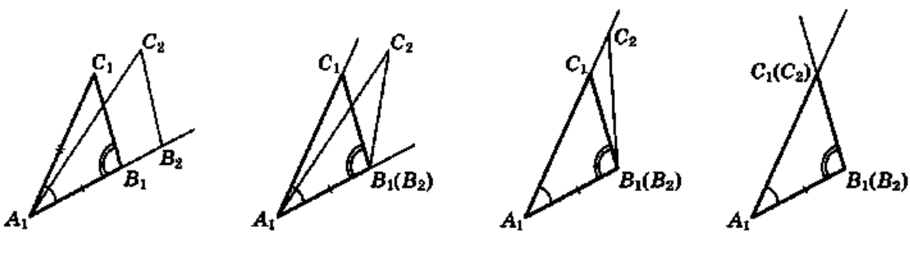


Рис. 56

4. Так как $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ и $\angle A_1B_2C_2 = \angle ABC$, то $\angle A_1B_1C_1$ и $\angle A_1B_2C_2$ равны и отложены от полупрямой A_1B_1 в одну полуплоскость, то по аксиоме *откладывания углов* луч B_1C_2 совпадает с лучом B_1C_1. Отсюда следует, что вершина C_2 совпадает с вершиной C_1, так как *две прямые* A_1C_1, и B_1C_2 *пересекаются только в одной точке* (рис. 56, г).

5. Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, а значит, равен треугольнику ABC.

После доказательства *второго признака равенства треугольников* полезно, как и после доказательства *первого признака равенства треугольников*, обратить внимание учащихся на то, что, если доказано $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, по *второму признаку равенства треугольников* ($AB = A_1B_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$; $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$), то отсюда следует, что $CB = C_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$.

4) Обучение применению *второго признака равенства треугольников* полезно, как и при изложении первого признака, начать с обучения школьников умению выделять три соответственно равные элемента данных треугольников по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 57:

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.
2. Почему эти треугольники равны?

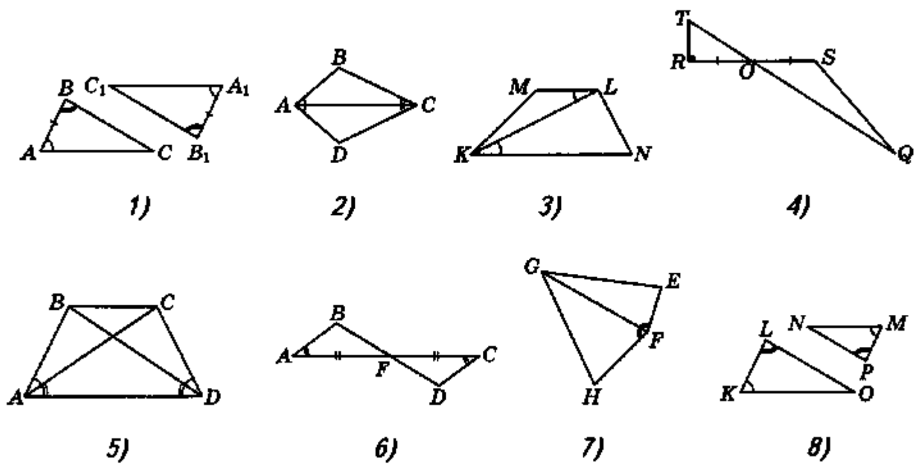


Рис. 57

Как и при изложении первого признака, после работы с плакатом можно предложить учащимся решить устно задания по готовому чертежу, используя упражнения 8 и 9 из дополнительных задач. Решение задачи 10 из дополнительных задач с выполнением чертежа желательно записать полностью в тетрадях.

Прямые AF и CD являются биссектрисами углов CAD и ACF соответственно, $\angle CAD = \angle ACF$. Докажите равенство треугольников ADC и CFA (рис. 58).

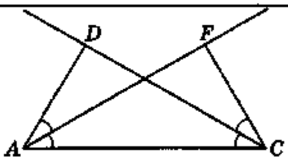


Рис. 58

Дано: *AF — биссектриса* $\angle CAD$;
CD *— биссектриса* $\angle ACF$;
$\angle CAD = \angle ACF$

Доказать: $\Delta ADC = \Delta CFA$.

Доказательство

$\angle CAF = \angle FAD$, *так как AF — биссектриса* $\angle CAD$;
$\angle ACD = \angle DCF$, *так как CD — биссектриса* $\angle ACF$;
$\angle CAF = \angle FAD = \angle ACD = \angle DCF$, *так как* $\angle CAD = \angle ACF$, *отсюда* $\angle CAF = \angle ACD$.

Рассмотрим ΔADC и ΔCFA: $\angle CAF = \angle ACD$ *по доказанному выше*;
$\angle CAD = \angle ACF$ *по условию;*
AC *— общая сторона.*
Следовательно, $\Delta ADC = \Delta CFA$ *по стороне и прилежащим к ней углам*.

И снова обратим внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *второй признак равенства треугольников* должна быть именно в такой форме: *по стороне и прилежащим к ней углам.*

Как и при отработке первого признака равенства треугольников рекомендуется решить задачу 17, в условии которой даны избыточные данные, при этом обязательно прокомментировать ее условие.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку второго признака равенства треугольников. А после доказательства теоремы, выполнить задание 110, которое является полным аналогом работы с плакатом. Затем предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи 111 и по аналогии решить задачу 112. Затем рекомендуется обсудить задачу 109, в условии которой даны избыточные данные.

Задача 110 из тетради и задача 10 из дополнительных задач методических рекомендаций являются одной и той же задачей. В тетради приведено решение более сложной задачи 113, в котором для доказательства равенства треугольников необходимо сначала применить второй признак равенства треугольников, а затем — первый. Полезно ее решение разобрать с учащимися на уроке.

5) Предлагаемое ниже планирование предполагает, что проверка усвоения учащимися доказательства первого и второго признаков равенства треугольников будет проводиться на третьем уроке. При этом рекомендуется доказательство теорем спрашивать только у хорошо успевающих учеников. Однако проверку решения домашних задач необходимо провести и на втором, и на третьем уроках. Учащимся обязательно нужно сообщить о том, что на третьем уроке будет проведена проверка умения доказывать *первый и второй признаки равенства треугольников*. Еще раз заметим, что это требование на данном этапе относится только к сильным учащимся, однако доводить эту информацию до всего класса не надо.

Примерное планирование изучения материала

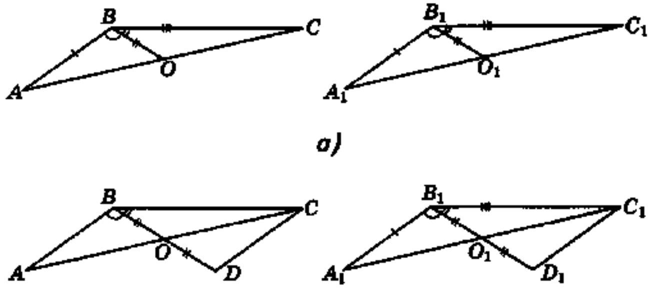
На первом уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта 20; разобрать по тексту учебника решение задачи 1 (§ 3, п. 20) решить задачи 1, 2 (устно) и 4 (письменно) из дополнительных задач; дома— вопрос 1, решить задачи 2–4.

На втором уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта 22; решить задачи 8 и 9 (устно) и 10 (письменно) из дополнительных задач; дома— вопрос 2, задачи 5, 6 и 8.

На третьем уроке в классе: провести опрос по доказательству первого и второго признаков равенства треугольников, самостоятельную работу; решить задачу 7 из учебника (§ 3, п. 22) и задачи 6, 8, 12 и 15 из дополнительных задач; дома прочитать пункт 21.

Указания к задачам

Задача 7 на данном этапе изучения геометрии является задачей повышенной сложности. Ее необходимо решить в классе, так как в этой задаче впервые встречается такой прием решения задач, как *дополнительное построение*. Этот прием решения задач на первых порах вызывает у учащихся определенные затруднения. Однако именно задачи, в решении которых используется этот прием, наиболее способствуют развитию пространственных представлений учащихся и обучению школьников умению выделять из чертежа к задаче конфигурацию, необходимую для применения определения или теоремы. На рисунке 59, а) отражено условие задачи.



а)

б)

Рис. 59

Решение. Выполним дополнительное построение: продолжим медиану BO за точку O (рис. 59, б):

1. $\Delta AOB = \Delta COD$ и $\Delta A_1O_1B_1 = \Delta C_1O_1D_1$ (по первому признаку).
2. Тогда $\angle ABO = \angle CDO$ и $\angle A_1B_1O_1 = \angle C_1D_1O_1$, т.е. $\angle CDO = \angle C_1D_1O_1$.
3. $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ (по второму признаку).
4. Отсюда $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, а значит, и $AB = A_1B_1$.
5. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по второму признаку).

Дополнительные задачи

1. На рисунке 60 луч BD является биссектрисой $\angle ABC$, на сторонах которого отложены равные отрезки AB и BC. Докажите равенство ΔBAD и ΔBCD.

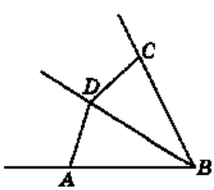


Рис. 60

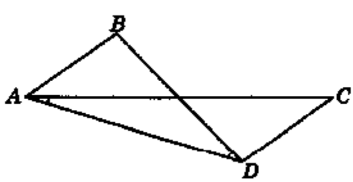


Рис. 61

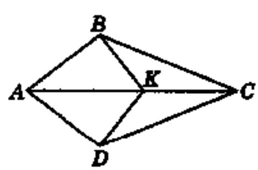


Рис. 62

2. В треугольниках BAD и CDA стороны BD и AC, а также углы ADB и DAC равны. Докажите равенство треугольников BAD и CDA (рис. 61).

3. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O так, что $AO = DO$ и $BO = CO$. Докажите, что $\Delta AOB = \Delta DOC$.

4. Докажите, что если $\Delta ABC = \Delta ADC$, то и $\Delta AKD = \Delta AKB$ (рис. 62).

5. Дано: $\Delta AOB = \Delta COD$ (рис. 63). Докажите, что $\Delta BOC = \Delta DOA$.

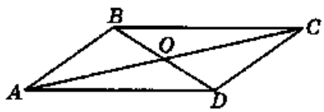


Рис. 63

6. Точки D и D_1 являются серединами соответствующих сторон AC и A_1C_1 равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$.

7. Из точек A и B на прямую a опущены перпендикуляры AC и BD, причем $AC = BD$. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta BDC$.

8. Докажите равенство треугольников BAC и DCA, если $\angle CAB = \angle ACD$ и $\angle CAD = \angle ACB$ (рис. 64).

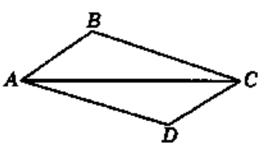


Рис. 64

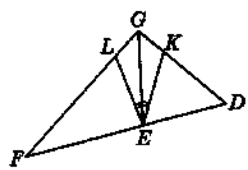


Рис. 65

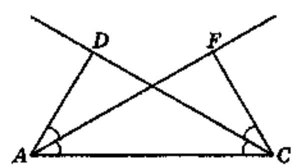


Рис. 66

9. В треугольнике FGD проведена биссектриса GE угла FGD. Докажите равенство треугольников LEG и KEG, если $\angle LEG = \angle KEG$ (рис.65).

10. Прямые AF и CD являются биссектрисами углов CAD и ACF соответственно, $\angle CAD = \angle ACF$. Докажите равенство треугольников ADC и CFA (рис. 66).

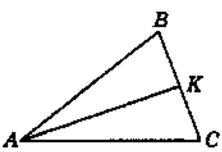


Рис. 67

11. Дано: $AK \perp BC$, $\angle CAK = \angle BAK$ (рис. 67). Докажите, что $\Delta CAK = \Delta BAK$.

12. По разные стороны от прямой AB отмечены точки C и D так, что луч AB является биссектрисой угла DAC, а луч BA — биссектрисой угла DBC. Докажите равенство треугольников ADB и ACB.

13. По одну сторону от прямой AB отмечены точки C и D так, что $\angle CAB = \angle DBA$ и $\angle DAB = \angle CBA$. Докажите равенство отрезков $AC = BD$.

14. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, точка D — середина стороны AC, точка D_1 — середина стороны A_1C_1. Докажите, что $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$.

15. В равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: на сторонах AB и A_1B_1 соответственно отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$.

16. Отрезки AC и BD пересекаются в точке F, которая является серединой каждого из отрезков AC и BD. Найдите длину отрезка AB, если $FC = 9$ см, $CD = 7$ см.

17. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, при этом $\angle OBD = \angle OCA$ и $OC = OB$. Найдите угол CAO, если $\angle ODB = 56°$, $\angle OBD = 42°$.

Самостоятельная работа по теме «Первый и второй признаки равенства треугольников»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

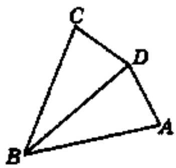
1-й вариант

1. Точка C лежит на биссектрисе угла A. На сторонах угла A отмечены точки B и D так, что $\angle ACB = \angle ACD$. Найдите длину отрезка BC, если $CD = 7$ см, $AC = 15$ см. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что точка O делит каждый отрезок пополам. Найдите угол ACO, если $\angle ODB = 63°$, $\angle OBD = 43°$. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________



3. Треугольники BDC и BDA равны. Определите, в каком отношении луч BD делит угол CBA.

Ответ: ______________________

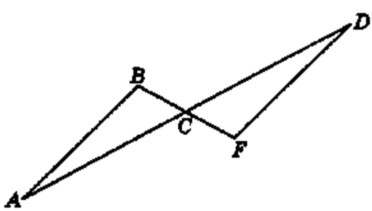
2-й вариант

1. В разных полуплоскостях относительно прямой AB отмечены точки C и D так, что $AD = BC$, $\angle DAB = \angle CBA$. Найдите длину отрезка AC, если $AD = 14$ см, $BD = 17$ см. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________

2. На сторонах угла A отмечены точки B и D так, что $AB = AD$. Точка C лежит на биссектрисе угла BAD. Найдите длину отрезка CB, если $CD = 8$ см, $AC = 11$ см. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________



3. На рисунке треугольники ABC и DFC равны. Определите, в каком отношении точка C делит отрезок AD.

Ответ: ______________________

Равнобедренный треугольник. Обратная теорема

Комментарий для учителя

Понятие равнобедренного треугольника достаточно просто, поэтому подготовительной работы не требуется. В то же время, введенное определение позволяет в значительной степени расширить класс задач, в решении которых используется прием *«подведение под определение»*. Изучаемые в этих пунктах свойство и признак равнобедренного треугольника также позволяют расширить класс содержательных задач, в решении которых они применяются в сочетании с изученными раннее признаками равенства треугольников, свойствами смежных и вертикальных углов.

Прямая и обратная теоремы *об углах при основании равнобедренного треугольника* доказываются с применением нестандартного приема — формального использования равенства ΔCAB и ΔCBA. При этом имеется в виду, что рассматриваются не два разных треугольника, а один треугольник ABC, для которого формально можно записать указанное выше равенство, используя равенство двух его сторон для прямой теоремы и равенство двух углов для обратной теоремы. <u>Для произвольного разностороннего треугольника равенство $\Delta CAB = \Delta CBA$</u>, принимая во внимание введенное в учебнике определение равенства треугольников, <u>является неверным</u>. Хотя каждый треугольник, естественно, сам себе равен, но в случае произвольного <u>разностороннего</u> треугольника это равенство можно записать <u>только как $\Delta CAB = \Delta CAB$</u>.

Текущие результаты изучения пунктов 23–24. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках равнобедренные и равносторонние треугольники, используя обозначения равных элементов или известные свойства фигур;

– формулировать и объяснять формулировки: свойства и признака равнобедренного треугольника;

– доказывать свойство и признак равнобедренного треугольника;

– решать задачи с использованием свойства и признака равнобедренного треугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1) При введении определения *равнобедренного треугольника* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: *«Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC ...»*, то учащиеся должны уметь выделить равные стороны $AB = BC$ (записать в ходе решения задачи или сразу в краткой записи условия). Отработка этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

В учебнике вводятся понятия боковой стороны и основания треугольника, но нет специального названия для вершины, лежащей против основания равнобедренного треугольника (во многих пособиях используется понятие *«вершина равнобедренного треугольника»*), поэтому при формулировках утверждений необходимо уточнение: *вершина, противолежащая основанию.*

Частным случаем равнобедренного треугольника является *равносторонний треугольник*, для него верны все свойства *равнобедренного треугольника*. При этом за основание *равностороннего треугольника* можно выбрать любую сторону.

На закрепление понятия *равнобедренного треугольника* и определений его сторон можно предложить устно выполнить задачи 9 и 10 из учебника и упражнения 1 и 2 из дополнительных задач.

Поскольку в учебнике здесь используется понятие периметра треугольника, необходимо напомнить учащимся, что *«периметр треугольника равен сумме длин всех его сторон*, т.е. $P_{ABC} = AB + BC + AC$».

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение* равнобедренного треугольника. *А на закрепление этого понятия и определений сторон равнобедренного треугольника можно предложить устно выполнить задания 116–119, причем задачи 116 и 119 являются теми же задачами, что и задачи 1 и 2 из дополнительных задач.*

2) Перед доказательствами *свойства углов равнобедренного треугольника* и *признака равнобедренного треугольника* полезно вспомнить с учащимися используемые в доказательствах определение *равных треугольников*, *первый и второй признаки равенства треугольников*. Желательно сделать это в ходе решения задач. Первая из предлагаемых ниже задач позволяет напомнить учащимся, как, формально используя запись равенства треугольников, сделать вывод о равенстве его элементов. Вторая задача является *первым признаком равенства треугольников* для *равнобедренных треугольников* и позволяет вспомнить *первый признак равенства треугольников*. Решение этих задач рекомендуется выполнить фронтально по готовому чертежу устно с записью условия на доске учителем, но без записи в тетрадях учащихся. Для экономии учебного времени полезно сделать плакаты и по ним разобрать решения предлагаемых задач.

1. На рисунке 65 треугольники DEA и FEB равны. Докажите, что треугольник AEB — равнобедренный (задача 3 из дополнительных задач).

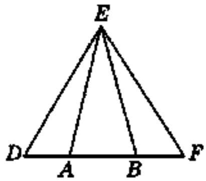


Рис. 65

Дано: $\Delta DEA = \Delta FEB$

Доказать: ΔAEB — *равнобедренный.*

Доказательство.

По условию $\Delta DEA = \Delta FEB$, значит, $EA = EB$.

Откуда ΔAEB — <u>равнобедренный по определению</u>.

2. Первый признак равенства равнобедренных треугольников: *Если боковая сторона и угол при вершине одного равнобедренного треугольника равны боковой стороне и углу при вершине другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны (рис. 66).*

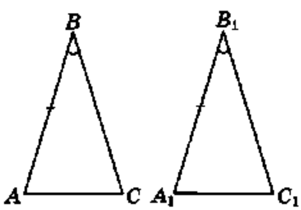


Рис. 66

Дано: ΔABC — *равнобедренный;*

$\Delta A_1B_1C_1$ — *равнобедренный;*

$AB = A_1B_1$;

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

$AB = BC$, так как по условию ΔABC — равнобедренный;

$A_1B_1 = B_1C_1$, так как по условию $\Delta A_1B_1C_1$ — равнобедренный;

$BC = B_1C_1$, так как по условию $AB = A_1B_1$;

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$ по условию;

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ по условию;

$BC = B_1C_1$ по доказанному выше.

Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ <u>по двум сторонам и углу между ними</u>.

В рабочей тетради выше приведенные задачи вместе с решениями даны под номерами 122 и 123. Их решения следу-

ет фронтально разобрать по тексту тетради. Такая работа является аналогом работы с плакатом, но не требует от учителя значительных затрат времени на изготовление плаката. Кроме того, наличие рабочей тетради позволяет сэкономить время на уроке, при этом запись решения задачи поможет учащимся в дальнейшем при решении аналогичной задачи.

Если изучение обеих теорем проводить на одном уроке, то это позволит сэкономить время и уделить больше внимания решению задач.

3) В доказательстве *свойства углов равнобедренного треугольника* и *признака равнобедренного треугольника* используется искусственный прием, поэтому привлекать учащихся к фронтальной работе при доказательстве теоремы *об углах при основании равнобедренного треугольника* нецелесообразно.

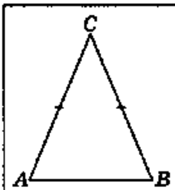


Рис. 67

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный;
AB — основание (рис. 67).

Доказать: $\angle A = \angle B$

Доказательство.

$CA = CB$ и $CB = CA$, так как $\triangle ABC$ — равнобедренный;
$\angle C = \angle C$ — общий.

Следовательно, $\triangle CAB = \triangle BAC$ по *первому признаку равенства треугольников.*

Отсюда $\angle A = \angle B$.

4) Доказательство *признака равнобедренного треугольника* аналогично доказательству *свойства углов равнобедренного треугольника*. Применяется тот же прием, однако при доказательстве равенства треугольников *CAB* и *BAC* будет использован второй признак равенства треугольников. Поэтому доказательство теоремы можно использовать для закрепления применяемого метода доказательства. Для этого можно, записав краткое условие и заключение теоремы, провести фронтальную работу с классом устно с записью решения на доске учителем, но без записи в тетрадях учащихся. Или, так же как и доказательство *теоремы об углах при основании*, доказательство провести самому учителю, подчеркивая сходство и различие двух теорем.

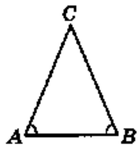


Рис. 68

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Дано: ΔABC;

$\angle A = \angle B$ (рис. 68) __________.

Доказать: ΔABC — *равнобедренный*

Доказательство.

$\angle B = \angle A$ и $\angle A = \angle B$ по *условию*;

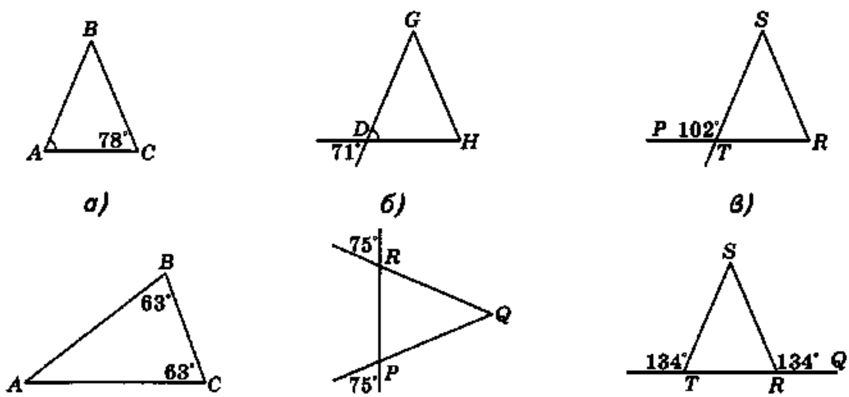
AB — общая сторона.

Следовательно, $\Delta CAB = \Delta BAC$ по *второму признаку равенства треугольников.*

Отсюда AC = CB. Значит, <u>по определению</u> треугольник <u>ABC — равнобедренный</u>.

5) Обучение применению *свойства углов равнобедренного треугольника* и *признака равнобедренного треугольника* можно начать с решения задач по готовым чертежам, используя для этого плакаты такого типа, как на рисунке 69:

> **1. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC, $\angle C = 78°$. Чему равен $\angle A$ (рис. 69, а).**
> **2. По данным рисунка 69, б) определите $\angle DHG$, если треугольник DGH — равнобедренный.**
> **3. По данным рисунка 69, в) определите $\angle SRT$, если треугольник TSR — равнобедренный.**
> **4. Докажите, что треугольники, изображенные на рисунках 69, г–е) — равнобедренные. Назовите их основания и боковые стороны.**



а) б) в) г) д) е)

Рис. 69

В ходе предложенных упражнений можно продолжить обучение школьников умению по условию задачи *«Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC...»*, находить в треугольнике равные стороны $AB = BC$. В задачах 1–3 на рисунках не отмечены равные стороны, а в формулировках задач сказано, что треугольники равнобедренные, значит, надо на рисунках отметить равные элементы в процессе решения задач.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки* свойства углов равнобедренного треугольника *и* признака равнобедренного треугольника. *На закрепление* свойства углов равнобедренного треугольника *выполнить задания 124–126, причем эти задачи из рабочей тетради являются аналогами задач, рекомендованных для работы по готовому чертежу (рис. 69, а) — в). Согласно рекомендациям, данным в рабочей тетради к задачам: задачу 124 следует решить устно и записать только ответ; решение задачи 125 разобрать по тексту тетради; а решение задачи 126 выполнить письменно. Задачи 127–129 могут быть использованы при проверке домашнего задания для части учащихся. На закрепление* признака равнобедренного треугольника *выполнить задания 132, 134, и 135. Задачи 134 и 135 из рабочей тетради являются аналогами задач, рекомендованных для работы по готовому чертежу (рис. 67, д) и е). Сначала желательно решить задачу 134. В комментариях к задачам в рабочей тетради рекомендуется решение задачи 132, данное в рабочей тетради, сравнить с решением этой же задачи (120). При этом следует обратить внимание учащихся, что если в решении задачи 120 использовался прием* «подведение под определение», *то в решении задачи 132 использовался* признак равнобедренного треугольника. *В дальнейшем в рабочих тетрадях регулярно будут приводиться решения одной и той же задачи разными методами по мере наращивания знаний и умений учащихся.*

6) Понятие *обратной теоремы* лучше ввести на втором уроке после проверки доказательств *теоремы об углах при основании равнобедренного треугольника* и *признака равнобедренного треугольника.* При этом используются записи условия и заключения обеих теорем, сделанные учащимися в процессе проверки усвоения теоретического материала при проверке домашнего задания.

«В равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Дано: ΔABC — равнобедренный; AB — основание ——————— Доказать: $\angle A = \angle B$	*«Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный».* Дано: ΔABC; $\angle A = \angle B$ ——————— Доказать: ΔABC — равнобедренный

Полезно объяснить учащимся, что в математике часто встречаются утверждения, которые составляют пару теорем: *прямая* и *обратная*. При этом всегда условие *прямой* теоремы *«Треугольник равнобедренный...»* в *обратной* теореме является заключением, а заключение *прямой* теоремы *«...углы при основании равны»* в *обратной* теореме является условием. *Прямая* и *обратная* теоремы взаимно-обратные.

Заметим, что справедливость прямой теоремы вовсе не означает справедливость обратной теоремы. Например, прямая теорема *«Вертикальные углы равны»*. Условие *«Вертикальные углы»*, заключение *«...углы равны»*. Сформулируем обратную теорему *«Если углы равны, то они вертикальные»*, что не верно.

Чтобы учащиеся лучше усвоили понятия *прямой* и *обратной* теорем полезно предложить сформулировать утверждение, обратное следующему: *«Если один из смежных углов — острый, то другой — тупой»*.

Задачи 12 и 16 из учебника, задача 14 из учебника и задача 3 из дополнительных задач, решенная на предыдущем уроке, дают еще примеры взаимно-обратных теорем. Решение задач 12 и 16 следует разобрать по тексту учебника.

В рабочей тетради на закрепление понятий прямой и обратной теорем рекомендуется выполнить задания 136 и 137. Задание 136 предлагает сформулировать утверждение, обратное следующему: «Если один из смежных углов — острый, то другой — тупой». Задача 137 в паре с задачей 129 те же задачи, что и задачи 12 и 16 из учебника.
При использовании в учебном процессе рабочей тетради полезно рассмотреть решение задачи 130 и по аналогии решить задачу 131. Решения этих задач интересны тем, что позволяют показать, как применить свойства углов равнобедренного треугольника в нестандартной ситуации.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе: изложить весь теоретический материал пунктов 23 и 24, кроме понятия *обратной теоремы*, решить задачи 9 и 10 из учебника (§ 3, п. 23) и задачи 1, 2 и 3 (устно) из дополнительных задач; дома— вопрос 3–6, решить задачи 11, 13, 15.

На втором уроке в классе: ввести понятие *обратной теоремы*; решить задачи 12, 14 и 16 из учебника (§ 3, п. 24) и задачу 3 из дополнительных задач; дома— вопрос 7, задачи 17 и 18.

Указания к задачам

Задачи 13, 14 и 17 представляют для учащихся определенную сложность, так как являются задачами, в которых рассматриваются треугольники как бы наложенные один на другой. Поэтому следует обратить внимание на работу с рисунком, используя штриховку частей плоскости, ограниченных рассматриваемыми треугольниками, тогда эти треугольники будут «виднее» учащимся. Например, рисунки 70 и 71 к задаче 13, рисунок 72 к задаче 14 и рисунок 70 к задаче 17 (обозначение точек A_1 и B_1 на рисунке следует заменить, соответственно, на обозначение C_1 и C_2).

В условии задачи 14 сказано, что точки A_1 и B_1 расположены на основании равнобедренного треугольника, значит, возможны два случая, данные на рисунках 72 и 73. Однако полезно рассмотреть и другие расположения точек A_1 и B_1, когда точки лежат на продолжении основания треугольника в обе стороны, и убедиться, что решение будет точно таким же (задача 6 из дополнительных задач).

Задача 4 из дополнительных задач является аналогом и дальнейшим развитием задач, рекомендованных для работы по готовому чертежу (рис. 69, а) — в).

В задаче 5 из дополнительных задач формулируется утверждение, обратное задаче, рекомендованной для работы по готовому чертежу (рис. 69, д).

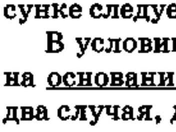


Рис. 70

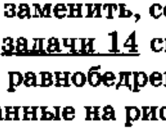


Рис. 71

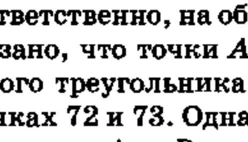


Рис. 72

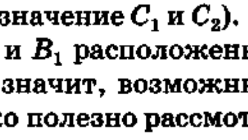


Рис. 73

Задача 9 из дополнительных задач является вторым признаком равенства равнобедренных треугольников.

Дополнительные задачи

1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 7 см, а основание — 4 см. Вычислите периметр треугольника.

2. В равностороннем треугольнике сторона равна 7 см. Вычислите периметр треугольника.

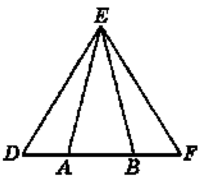


Рис. 74

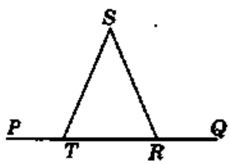


Рис. 75

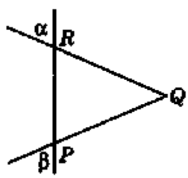


Рис. 76

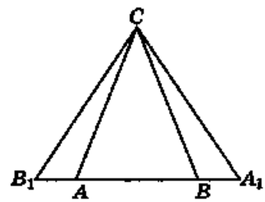


Рис. 77

3. На рисунке 74 треугольники DEA и FEB равны. Докажите, что треугольник AEB — равнобедренный.

4. Треугольник TSR — равнобедренный с основанием TR (рис. 75).

а) Докажите, что $\angle STP = \angle SRQ$.

б) Определите градусную меру угла STP, если $\angle SRT = 46°$.

в) Определите градусную меру углов STR и SRT, если $\angle SRQ = 134°$.

5. На сторонах угла Q отложены равные отрезки QR и QP. Через точки R и P проведена прямая. Докажите, что $\angle\alpha = \angle\beta$ (рис. 76).

6. На продолжении основания AB равнобедренного треугольника ACB отложены равные отрезки AB_1 и A_1B (рис. 77). Докажите, что треугольники AB_1C и A_1BC равны.

7. На сторонах угла A отложены равные отрезки AB и AC, а на биссектрисе угла A отмечена точка D. Докажите, что треугольник DBC равнобедренный. Укажите его основание.

8. На рисунке 74 треугольник AEB — равнобедренный с основанием AB , причем $\angle DEA = \angle FEB$. Докажите, что треугольники DEA и FEB равны.

9. Если основание и угол при основании одного равнобедренного треугольника равны основанию и углу при основании другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны (Второй признак равенства равнобедренных треугольников).

10. На сторонах равностороннего треугольника ABC отмечены соответственно точки K, L и M так, что $AK = BL = CM$. Докажите, что точки K, L и M являются вершинами равностороннего треугольника.

Медиана, биссектриса и высота треугольника. Свойство медианы равнобедренного треугольника

Комментарий для учителя

Изучаемые в этих пунктах понятия *медианы*, *биссектрисы* и *высоты* треугольника; а также теорема *о медиане равнобедренного треугольника, проведенной к основанию* позволяют расширить класс содержательных задач, в решении которых они применяются в сочетании с изученными раннее признаками равенства треугольников, свойством и признаком равнобедренного треугольника и свойствами смежных и вертикальных углов.

Текущие результаты изучения пунктов 25–26. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках «медиану треугольника», «биссектрису треугольника» и «высоту треугольника», используя обозначения равных элементов или известные свойства фигур;

– формулировать и объяснять формулировки: определений медианы, биссектрисы и высоты треугольника, теоремы о медиане равнобедренного треугольника, проведенной к основанию;

– доказывать теорему о медиане равнобедренного треугольника, проведенной к основанию;

– решать задачи с использованием понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника; а также теоремы о медиане равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.

Методические рекомендации к изучению материала

1) При введении определения *медианы, биссектрисы и высоты треугольника* основное внимание необходимо направить не столько на запоминание учащимися формулировок определений, сколько на их понимание, умения распознавать и изображать их на рисунках, применять при решении задач, уметь производить краткую запись в условии задачи и в ходе ее решения:

– если в условии сказано: «*проведена медиана BD треугольника ABC* ...», то учащиеся должны уметь выделить равные отрезки $AD = DC$;

– если в условии сказано: «*проведена высота BD треугольника ABC* ...», то учащиеся должны уметь выделить либо перпендикулярные отрезки $BD \perp AC$, либо прямые углы $\angle BDA = \angle BDC = 90°$;

– если в условии сказано: «*проведена биссектриса BD треугольника ABC* ...», то учащиеся должны уметь выделить равные углы $\angle ABD = \angle CBD$.

Формулировки *определений медианы, биссектрисы и высоты треугольника* целесообразно сопровождать выполнением на доске их построений.

После работы по готовым чертежам полезно предложить учащимся устно выполнить упражнения 1 и 2 из дополнительных задач и задачу 27 из учебника, которую можно рассматривать как подготовительную к решению задачи 2.

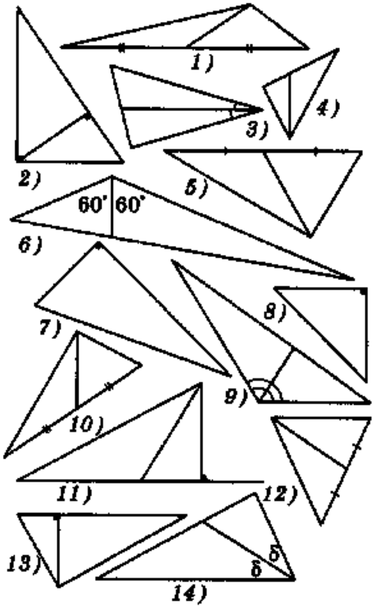


Рис. 78

Для закрепления введенных понятий можно провести работу, используя плакат или готовые рисунки (рис. 78):

1. Среди треугольников, изображенных на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены высоты.
2. Среди треугольников, изображенных на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены медианы.
3. Среди треугольников, изображенных на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены биссектрисы.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради для закрепления введенных понятий медианы, биссектрисы и высоты треугольника целесообразно выполнить задания 138–140, которые являются полным аналогом работы с приведенным выше плакатом. Затем полезно предложить учащимся упражнения 141–143. Задания 138–140 направлены на закрепление умения распознавать введенные понятия на рисунках, а задания 141–143 на их понимание. Задача 144 — это задача 27 из учебника. Задачу 145 из тетради рекомендуется решить на втором уроке.

2) Доказательство *теоремы о свойстве медианы равнобедренного треугольника* достаточно простое, поэтому его можно провести в форме беседы.

Одновременно с формулировкой теоремы следует сделать рисунок и выполнить краткую запись условия и заключения теоремы.

В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

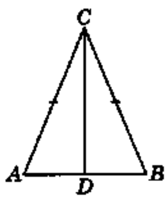


Рис. 79

Дано: ΔABC — *равнобедренный*;
AB — *основание*
CD — *медиана* (рис. 79)

Доказать: CD — *биссектриса и высота*.

Доказательство.

$AC = BC$, по условию ΔABC — равнобедренный.

$\angle CAD = \angle CBD$, как углы при основании равнобедренного треугольника.

Отрезки AD и *BD равны, по условию CD — медиана.*

Значит, треугольники CAD и *CBD равны по первому признаку равенства треугольников.*

Из $\Delta ACD = \Delta BCD$ следует: $\angle ACD = \angle BCD$ и $\angle ADC = \angle BDC$.

Так как $\angle ACD = \angle BCD$, то *CD — биссектриса* по определению.

Так как $\angle ADC = \angle BDC$ и *$\angle ADC$* и *$\angle BDC$ смежные, то $\angle ADC = \angle BDC = 90°$ и AD — высота* по определению.

Таким образом, установлено, что *биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают.*

Здесь полезно обсудить следующий вопрос:

Всегда ли верно утверждение: «*Медиана равнобедренного треугольника является одновременно его биссектрисой и высотой?*»

Обсуждение этого утверждения позволяет еще раз обратить внимание учащихся на формулировку теоремы, в которой сказано, что утверждение верно только для *медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию треугольника* или *проведенной из вершины, противолежащей основанию.*

Из решения задачи 28 из учебника, которую рекомендуется разобрать по тексту учебника, вытекает справедливость утверждения:

1. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

А из решения задачи 30 из учебника вытекает справедливость утверждения:

2. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.

Задачу 30 рекомендуется решить после изучения темы «Третий признак равенства треугольников».

Приведенные утверждения вместе с теоремой *о свойстве медианы равнобедренного треугольника* могут использоваться при решении задач. Особенно это относится к утверждению 2, которое активно используется в задачах на применение теоремы Пифагора.

В качестве заданий на непосредственное применение теоремы *о свойстве медианы равнобедренного треугольника* можно использовать задания по готовым чертежам 3 и 4 из дополнительных задач, а также задачу 5 на понимание теоремы и умение ее применить в нестандартной ситуации.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы о свойстве медианы равнобедренного треугольника. А после доказательства теоремы целесообразно выполнить задания 146 и 147, которые в дополнительных задачах методических рекомендаций даны под номерами 3 и 4. Эти задания направлены на формирование умения применять теорему о свойстве медианы равнобедренного треугольника при решении задач.*

3) Оперативную проверку знаний учащихся по теме «*Равнобедренный треугольник*» рекомендуется провести как самостоятельную работу, используя задания с кратким ответом и задания с выбором ответа. Самостоятельную работу в форме теста рекомендуется провести на втором уроке. Самостоятельная работа рассчитана на 15 мин.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке <u>в классе</u>: изложить весь теоретический материал пунктов 25 и 26, решить задачи 27 и 28 из учебника и задачи 1–3 (устно) из дополнительных задач; <u>дома</u>— вопрос 8–11, решить задачи 19, 22 и 25.

На втором уроке в <u>классе</u>: решить задачи 20(1), 21(1), 23 и 26; провести самостоятельную работу; <u>дома</u>—задачи 20(2), 21(2) и 24.

Указания к задачам

В задачах 20, 21 и 24 требуется доказать равенство треугольников, используя определения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, а также свойство медианы равнобедренного треугольника.

При решении задачи 23 необходимо пояснить условие задачи:

> «Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу».

Задачи с условием *«Докажите равенство треугольников по...»* будут встречаться довольно часто. Такое условие означает, что есть два треугольника, у которых равны перечисленные в условии задачи элементы. Запишем условие задачи 23, выполняя при этом чертеж, на котором отметим равные элементы треугольников (рис. 80).

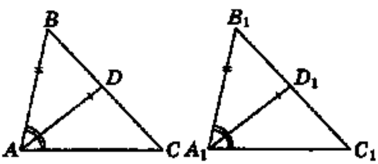


Рис. 80

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$AD = A_1D_1$ — *биссектрисы*;
$AB = A_1B_1$;
$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Полученный рисунок должен помочь учащимся увидеть равные треугольники ADB и $A_1D_1\ B_1$. Чтобы доказать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, необходимо выделить три равных элемента, чтобы можно было использовать первый ($AB = A_1B_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$; $AC = A_1C_1$) или второй ($AB = A_1B_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$; $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$) признак равенства треугольников. Таким образом, составлен план решения задачи.

При решении задачи 26 полезно сделать два рисунка, первый — когда оба треугольника лежат по одну сторону от прямой, содержащей их общее основание, и второй — когда треугольники лежат по разные стороны.

Дополнительные задачи

1. Может ли высота треугольника находиться вне треугольника?

2. Две стороны треугольника равны 5 см и 3 см. Медиана, проведенная к третьей стороне, делит данный треугольник на два. Найдите разность периметров этих треугольников.

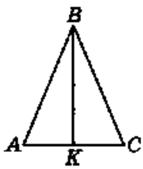


Рис. 81

3. В равнобедренном треугольнике ABC к основанию AC проведена медиана BK. Найдите углы ABK и BKA, если $\angle ABC = 46°$ (рис. 81)

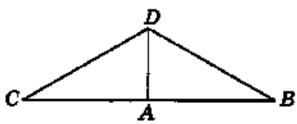


Рис. 82

4. В равнобедренном треугольнике BDC к основанию CB проведена медиана DA. Найдите углы ΔADC, если $\angle BDC = 120°$ (Рис. 82).

5. Как в равнобедренном треугольнике провести высоту (биссектрису) из вершины, противолежащей основанию, используя только линейку с делениями?

6. В равностороннем треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке K. Докажите, что $\Delta AKE = \Delta BKD$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. На стороне AB отмечена точка E, а на стороне BC — точка F, причем $\angle BDE = \angle BDF$. Докажите, что $\Delta BDE = \Delta BDF$.

8. В равностороннем треугольнике ABC проведены медианы CM и BK. Докажите, что $\Delta BMC = \Delta BKC$.

9. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ высоты BD и B_1D_1 равны и делят стороны AC и A_1C_1 на соответственно равные отрезки: $AD = A_1D_1$ и $CD = C_1D_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

10. Докажите, что треугольник равнобедренный, если у него медиана является биссектрисой.

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектрисы AD и CE. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CBE$.

12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены медианы AM и CK. Докажите, что $\Delta ABM = \Delta CBK$.

Самостоятельная работа по теме «Равнобедренный треугольник»

Самостоятельная работа рассчитана на 15 мин.

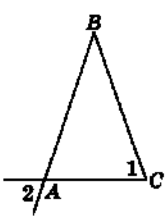
1-й вариант

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC на 1 см меньше его боковой стороны AB, а периметр равен 23 см. Найдите основание AC.

Ответ: 1. 7 см; 2. 8 см; 3. 9 см; 4. 11 см.

2. Определите вид треугольника, если одна его сторона равна 5 см, вторая — 3 см, а периметр равен 14 см.

1. Равнобедренный треугольник.
2. Равносторонний треугольник.
3. Разносторонний треугольник.



3. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Определите $\angle 2$, если $\angle 1 = 56°$.

Ответ: ______________________________

4. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное следующему: «Если углы, смежные с углами при одной из сторон треугольника, равны, то данный треугольник — равнобедренный».

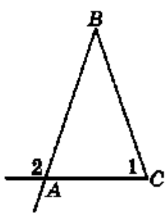
2-й вариант

1. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB в два раза больше его основания AC, а периметр равен 30 см. Найдите основание AC.

Ответ: 1. 3 см; 2. 5 см; 3. 6 см; 4. 10 см.

2. Определите вид треугольника, если одна его сторона равна 5 см, вторая — 3 см, а периметр равен 7 см.

1. Равнобедренный треугольник.
2. Равносторонний треугольник.
3. Разносторонний треугольник.



3. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Определите $\angle 2$, если $\angle 1 = 62°$.

Ответ: ______________________________

4. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное следующему: *«Если углы, вертикальные с углами при одной из сторон треугольника, равны, то данный треугольник — равнобедренный»*.

Третий признак равенства треугольников

Комментарий для учителя

Доказательство *третьего признака равенства треугольников* достаточно трудное и отличается от доказательства *первого и второго признаков равенства треугольников*, поэтому рекомендуется провести его полностью самому учителю. Внимание учащихся необходимо сосредоточить на основной идее доказательства и логической последовательности рассуждений. Метод доказательства от противного детям уже знаком, и при доказательстве *третьего признака равенства треугольников* есть возможность еще раз продемонстрировать его применение. Решения задач, в ходе которых проводятся доказательные рассуждения, также способствуют усвоению учащимися *третьего признака равенства треугольников*.

Текущие результаты изучения пункта 27. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках треугольники, равные по третьему признаку равенства треугольников, используя обозначения равных элементов или известные свойства фигур;

– формулировать и объяснять формулировку третьего признака равенства треугольников;

– доказывать (требование только для сильных учащихся) третий признак равенства треугольников;

– решать задачи с использованием третьего признака равенства треугольников.

Методические рекомендации к изучению материала

1. В доказательстве *третьего признака равенства треугольников* используются ссылки на ранее изученные определения, аксиомы и теоремы. Поэтому перед началом работы над теоремой, как и при доказательстве *первого* и *второго признаков равенства треугольников* целесообразно провести фронтальное повторение. При этом полезно в виде рисунков зафиксировать их на доске и сохранять до конца работы над теоремой:

1) определение равенства отрезков (рис. 83, а),

2) определение равенства треугольников (рис. 83, б),

3) определение равнобедренного треугольника (рис. 83, в),

4) определение медианы треугольника (рис. 83, г),

5) аксиома откладывания отрезков (рис. 83, д),

6) аксиома существования треугольника, равного данному (рис. 83, е),

7) теорема о медиане равнобедренного треугольника (рис. 83, ж),

8) теорема о прямой, перпендикулярной данной (рис. 83, з).

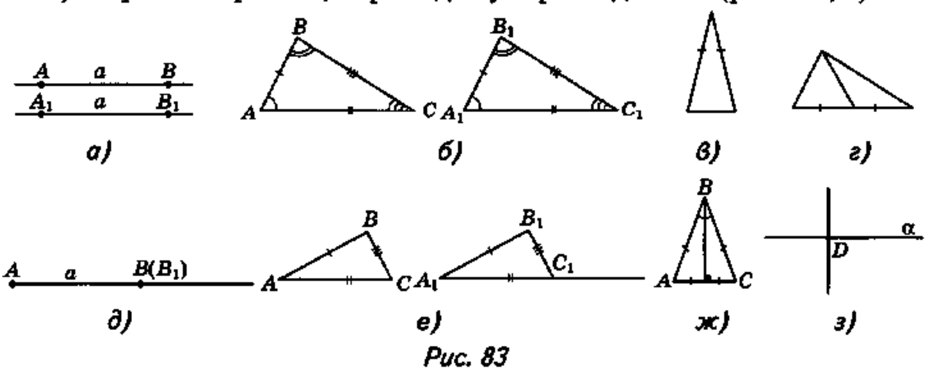


Рис. 83

2. Так как доказательство *третьего признака равенства треугольников* достаточно трудное, то его лучше провести полностью самому учителю. Включение же учащихся во фронтальную работу при доказательстве теоремы может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от учащихся ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 84. При этом полезно выделить в треугольниках соответственно равные элементы.

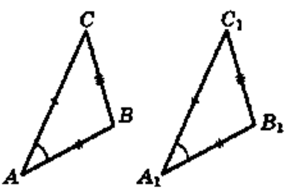


Рис. 84

Дано: $BC = B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$ (рис. 84).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

1) По аксиоме *существования треугольника, равного данному*, существует треугольник $A_1B_2C_2$, равный треугольнику ABC, у которого вершина A_1 совпадает с вершиной A_1 треугольника $A_1B_1C_1$, вершина B_2 лежит на луче A_1B_1, а вершина C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где находится вершина C_1 (рис. 85, а).

Для проведения обоснования того, что $\Delta A_1B_2C_2$ и $\Delta A_1B_1C_1$ совпадают, полезно выписать на доске равенства соответствующих элементов, взятые из условия и вытекающие из равенства $\Delta A_1B_2C_2$ и ΔABC:

$\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC	$\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$
$B_1C_1 = BC$	$B_2C_2 = BC$
$A_1B_1 = AB$	$A_1B_2 = AB$
$A_1C_1 = AC$	$A_1C_2 = AC$.

2) Так как $A_1B_1 = AB$ и $A_1B_2 = AB$, то $A_1B_1 = A_1B_2$ и отложены на полупрямой A_1B_1 от ее начала — точки A_1, значит, по *аксиоме откладывания отрезков*, вершина B_2 совпадает с вершиной B_1 (рис. 85, б).

3) Две вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_2$ совпадают (вершина A_1 — общая, вершины B_2 и B_1 совпали), а вершины C_1 и C_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1B_1. Докажем, что точка C_2 совпадает с точкой C_1.

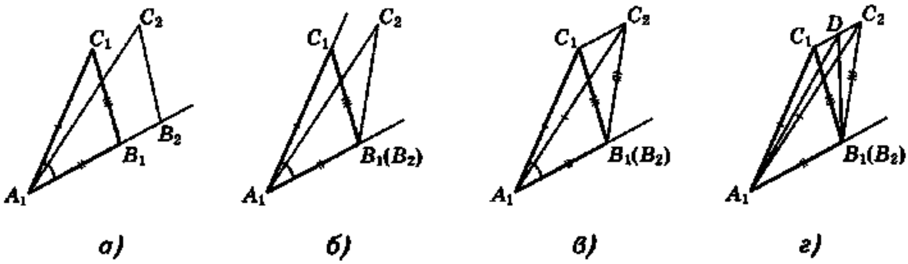


Рис. 85

Для доказательства применим метод от противного, т.е. предположим, что точки C_2 и C_1 не совпадают. Соединим точки C_2 и C_1 и получим два треугольника $C_1A_1C_2$ и $C_1B_1C_2$. Из условия теоремы и из равенства треугольников $A_1B_2C_2$ и ABC следует: $A_1C_1 = A_1C_2$ и $B_1C_1 = B_1C_2$. Отсюда следует, что треугольники $C_2A_1C_1$ и $C_1B_1C_2$ — равнобедренные по определению (рис. 85, в).

Точка D — середина отрезка C_1C_2. Тогда отрезок A_1D — медиана равнобедренного треугольника $C_2A_1C_1$, а отрезок B_2D — медиана равнобедренного треугольника $C_2\ B_2C_1$. Значит, по теореме о *медиане равнобедренного треугольника* медианы A_1D и B_2D равнобедренных треугольников $C_2A_1C_1$ и $C_2B_2C_1$ являются их высотами (рис. 85, г).

Так как по теореме о *прямой, перпендикулярной данной*, через точку D может проходить только одна прямая, перпендикулярная C_1C_2, то точки A_1, B_2 и D лежат на одной прямой. Такой прямой может быть только прямая $A_1B_1(B_2)$. Но тогда, так как точка D — середина отрезка C_1C_2, то точки C_1 и C_2 должны лежать в разных полуплоскостях. А по аксиоме *существования треугольника, равного данному*, вершина C_2 лежит в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, что и вершина C_1.

Итак, пришли к противоречию, значит, точка C_2 совпадает с точкой C_1.

4) После совпадения всех трех вершин делается вывод о равенстве треугольников. Однако при этом пропускается обоснование того факта, что сторона C_2B_2 совпадает со стороной C_1B_1, т.к. *через две* совпавшие *точки* (C_2 с C_1 и B_2 с B_1) *можно провести только одну прямую* и, значит, стороны C_2B_2 и C_1B_1 совпадают. Аналогично доказывается совпадение сторон C_2A_1 и C_1A_1.

5) Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, равным треугольнику ABC по аксиоме *существования треугольника, равного данному*, а значит, треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC.

3. Обучение применению *третьего признака равенства треугольников* желательно начать с обучения школьников <u>умению</u> выделять три соответственно равные элемента данных треугольников по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 86:

> 1) Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.
> 2) Почему эти треугольники равны?

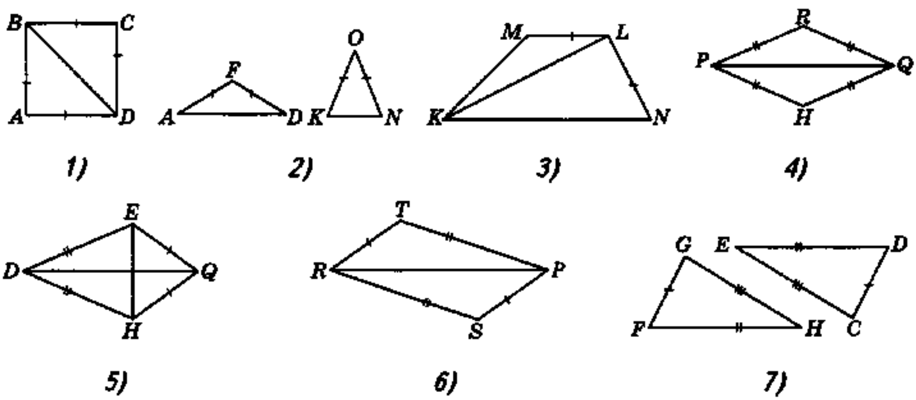


Рис. 86

После работы с плакатом полезно разобрать с учащимися по тексту учебника решение задачи 29, а затем выполнить задания по готовому чертежу, используя упражнения 1–3 из дополнительных задач. Решение задачи 1 из дополнительных задач целесообразно записать полностью в тетрадях учащихся, а остальные решить устно.

> По рисунку 87 докажите равенство треугольников BAC и DAC, если $AB = AD$,
> $BC = DC$.

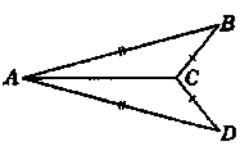


Рис. 87

<u>Дано: $AB = AD$, $BC = DC$.</u>

Доказать: $\Delta BAC = \Delta DAC$.

Решение.

Рассмотрим $\Delta BAC = \Delta DAC$. $AB = AD$ — *по условию;*

$BC = DC$ — *по условию;*

AC — *общая сторона.*

Следовательно, $\Delta BAC = \Delta DAC$ <u>*по трем сторонам.*</u>

И снова обратим внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *третий признак равенства треугольников* должна быть именно в такой форме: *«по трем сторонам»*.

При решении задач необходимо продолжать уделять внимание работе с рисунками, учить школьников отмечать на рисунках равные элементы по условию задачи и находить равные элементы по рисунку с пометками при решении задач по готовому чертежу. Решение задачи 29 полезно предложить учащимся записать в тетрадях, если на уроке не хватает времени, то оформление задачи можно задать на дом.

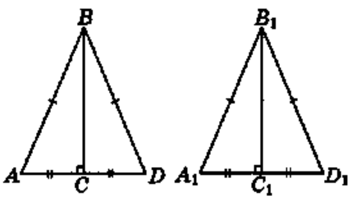


Рис. 88

Дано: $\angle C$ и $\angle C_1$ — прямые:
$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство.

1. Сделаем дополнительное построение. Построим: $\Delta CBD = \Delta CBA$, и $\Delta C_1B_1D_1 = \Delta C_1B_1A_1$ (рис. 88).

2. $AB = A_1B_1$ по условию;
$AD = A_1D_1$, так как $AC = A_1C_1$;
$BD = B_1D_1$, так как $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$.
Отсюда $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ по трем сторонам.

3. Из $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ следует $\angle A$ и $\angle A_1$.

4. $AB = A_1B_1$ по условию;
$AC = A_1C_1$ по условию,
$\angle A = \angle A_1$ по доказанному.
Отсюда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Если в процессе обучения используется рабочая тетрадь, то следует предложить учащимся записать формулировку третьего признака равенства треугольников. А после доказательства теоремы, проведенной учителем, выполнить задание 149, которое является полным аналогом работы с плакатом. Затем предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи 150 и по аналогии решить задачи 151 и 152.

Задачи 150–152 из рабочей тетради в списке дополнительных задач методических рекомендаций даны под номерами 1–3.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе: доказать *третий признак равенства треугольников*, решить задачу 29 и 30, дополнительные задачи 1–3; дома — вопрос 12, задачи 31, 33.

На втором уроке в классе: повторить материал параграфа в ходе решения задач, 35, 36, 39, 40 из учебника, 5 и 6 из дополнительных задач; дома — задачи 34, 37, 38.

Указания к задачам

Большинство задач к пункту комплексного характера. Они направлены на повторение материала всего параграфа.

Результат решения задачи 29 может быть использован при решении задачи 30, которая необходима для вывода о совпадении медианы, биссектрисы и высоты равнобедренного треугольника, проведенных к его основанию.

Задачи 32 и 39 повышенной сложности. В учебнике к решению этих задач приведены указания в виде чертежей. Решение задачи 32 хорошо видно из предложенного рисунка. Задачу 39 необходимо решить в классе, так как при ее решении используется тот же прием, что и в задаче 7, а именно «*дополнительное построение*». При этом представляется полезным организовать решение в форме устной беседы, проводя аналогии с решением задачи 7 по записи в тетрадях и активно используя рисунки.

На рисунке 89 отражено условие задачи.

План решения задачи (рис. 90):

1. $\Delta AOB = \Delta COD$ и $\Delta A_1O_1B_1 = \Delta C_1O_1D_1$ (по первому признаку).
2. Тогда $AB = CD$ и $A_1B_1 = C_1D_1$, т.е. $CD = C_1D_1$.
3. $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ (по третьему признаку).

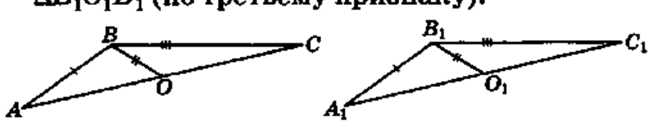


Рис. 89

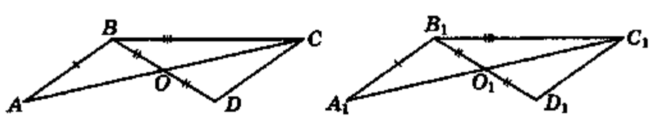


Рис. 90

4. Отсюда $CO = C_1O_1$, как соответствующие медианы равных треугольников (задача 21), а значит, и $AC = A_1C_1$.

5. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по третьему признаку).

Дополнительные задачи

1. По рисунку **91** докажите равенство треугольников BAC и DAC, если $AB = AD$, $BC = DC$.

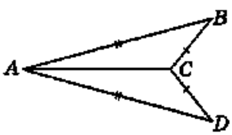


Рис. 91

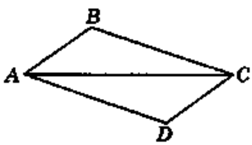


Рис. 92

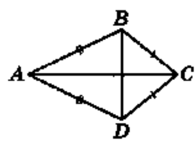


Рис. 93

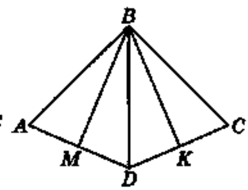


Рис.94

2. Стороны AB и BC треугольника BAC соответственно равны сторонам CD и DA треугольника DCA. Определите градусную меру $\angle ABC$, если $\angle CDA = 127°$ (рис. **92**).

3. В треугольниках ABC и ADC стороны AB и AD и BC и DC равны (рис. **93**). Докажите, что луч AC является биссектрисой угла BAD, а луч CA — биссектрисой угла BCD.

4. Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника равны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

5. Сформулируйте третий признак равенства треугольников для равносторонних треугольников.

6. Треугольники ABD и DBC — равнобедренные с равными основаниями AD и CD (рис. **94**). Докажите, что: а) $\Delta ABD = \Delta CBD$; б) медианы BM и BK этих треугольников равны.

7. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка O так, что $AO = BO = CO$. Прямая BO пересекает сторону AC в точке D. а) Докажите, что отрезок BD является медианой, биссектрисой и высотой данного треугольника. б) Определите $\angle BAO$ и $\angle BCO$, если $\angle ABC = 80°$.

8. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O так, что $AO = BO = CO$. Докажите, что $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta AOC$.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Признаки равенства треугольников»

Комментарий для учителя

1. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Признаки равенства треугольников» учащиеся должны:

– распознавать и изображать на чертежах равнобедренные треугольники, равносторонние треугольники; высоту, медиану и биссектрису треугольника;

– авыделять из данной конфигурации заданные в условии задания элементы фигур;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения равнобедренного и равностороннего треугольников; высоты, медианы и биссектрисы треугольника;
- признаки равенства треугольников, теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

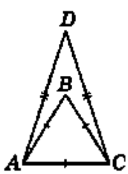
2. При подготовке к контрольной работе решить задачи 35, 36, 39, 40 из учебника. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса. На дом можно предложить задачи 34, 37, 38.

Можно предложить учащимся выполнить тесты 4 и 5*, рекомендованные для § 3 «Признаки равенства треугольников» и направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Поскольку каждый тест имеет четыре варианта, то можно просто использовать все восемь вариантов или создать из них один тест, используя часть заданий из каждого теста. Первый вариант более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задание 1 варианта 3 теста 5, который позволяет обсудить с учащимся тему: отрицательный результат — тоже результат.

3. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4–5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

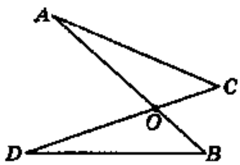
Контрольная работа по теме «Признаки равенства треугольников»

1-й вариант



1. Равносторонний и равнобедренный треугольники имеют общее основание. Периметр равностороннего треугольника равен 36 см, а периметр равнобедренного равен 40 см. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника.

Ответ: ______________________



2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, при этом $OA = OD$ и $OC = OB$. Найдите угол CAO, если $\angle ODB = 33°$, $\angle OBD = 54°$.

1. 21°; 2. 33°; 3. 54°; 4. 88°.

* Т.М. Мищенко. «Геометрия. Тесты. 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова М.: «Просвещение»

3. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

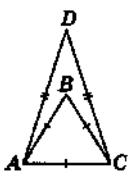
Периметр равнобедренного треугольника равен 18 см. Одна из его сторон равна 6 см. Найдите длины двух других сторон.

1. *одно*; 2. *два*; 3. *три*; 4. *решений нет*.

4. В треугольнике ABC биссектриса AD является высотой треугольника. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 14 см, а биссектриса AD равна 3 см.

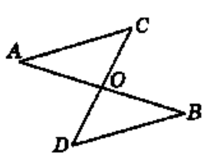
5. На двух перпендикулярных прямых от точки их пересечения отложены равные отрезки AO, CO, BO и DO. Докажите, что отрезки AB, BC, CD и DA равны.

2-й вариант



1. Равносторонний и равнобедренный треугольники имеют общее основание. Периметр равнобедренного треугольника равен 40 см, а боковая сторона равна 14 см. Найдите стороны равностороннего треугольника.

Ответ: ______________________________



2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, при этом делятся пополам. Найдите угол CAO, если $\angle ODB = 63°$, $\angle OBD = 47°$.

1. 110°; 2. 63°; 3. 47°; 4. 16°.

3. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

В равнобедренном треугольнике стороны равны 8 см и 5 см. Найдите периметр треугольника.

1. *одно*; 2. *два*; 3. *три*; 4. *решений нет*.

4. В треугольнике ABC высота AD является медианой треугольника. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ADB равен 15 см, а высота AD равна 4 см.

5. Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

§ 4. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Основное содержание данного параграфа составляют теорема о сумме углов треугольника, признаки параллельности прямых и свойства углов при параллельных прямых и секущей. Вместе с признаками равенства треугольников эти вопросы являются базовыми для курса планиметрии. Изложение этих вопросов в данном курсе имеет ряд особенностей. Здесь сначала вводятся только три вида углов, образованных при пересечении двух прямых третьей: внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие и позднее соответственные углы.

Существенным отличием данного курса является наличие определений внутренних односторонних и внутренних накрест лежащих углов. Определение соответственных углов вводится на конструктивном уровне. Обычно углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, вводятся в школьных курсах геометрии без определений, только на наглядном уровне.

Теоремы, рассмотренные в параграфе, дают возможность расширить круг задач, связанных с вычислениями. Такие задачи здесь составляют значительно большую долю, чем в предыдущей теме, где основную массу составляли задачи на доказательство. Однако следует иметь в виду, что и при решении вычислительных задач от учащихся требуется умение проводить доказательные рассуждения.

В этом же параграфе вводятся определения треугольников по углам: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные и доказываются признаки равенства прямоугольных треугольников.

Планируемые итоговые результаты изучения четвертого параграфа.

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках внутренние односторонние, внутренние накрест лежащие и соответственные углы, внешний угол треугольника;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи, параллельные прямые, внутренние односторонние, внутренние накрест лежащие и соответственные углы, внешний угол треугольника, прямоугольный треугольник;

– иллюстрировать и объяснять формулировки признаков параллельности прямых, свойств углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, признаков равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°; теоремы о сумме углов треугольника, теоремы о внешнем угле треугольника;

– определять вид треугольника по углам, применяя теорему о сумме углов треугольника;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения внутренних односторонних и внутренних накрест лежащих, соответственных углов; внешнего угла треугольника;
- признаки параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, признаки равенства прямоугольных треугольников;
- теорему о сумме углов треугольника, теорему о внешнем угле треугольника;
- алгебраический аппарат, метод от противного.

Параллельность прямых. Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей

Комментарий для учителя

При введении определений внутренних накрест лежащих и односторонних углов для обоснования расположения точек относительно прямой используются аксиомы разбиения плоскости на две полуплоскости, что естественно вызывает определенные затруднения у учащихся. Поэтому основное внимание при отработке понятий внутренних накрест лежащих и односторонних углов следует уделить умению применять эти понятия на наглядном уровне в решении большинства задач.

Текущие результаты изучения пунктов 29–30. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие углы;

– формулировать и объяснять формулировки определений внутренних односторонних и внутренних накрест лежащих углов;

– доказывать теорему «Две прямые, параллельные третьей, параллельны»;

– решать задачи с использованием признак параллельности прямых и понятия о внутренних односторонних и внутренних накрест лежащие углах;

– объяснять термин «секущая».

Методические рекомендации к изучению материала

1) Перед тем, как сформулировать *признак параллельности прямых*, можно напомнить учащимся, что с понятием «*признак*» они уже встречались при изучении признаков равенства треугольников и свойств равнобедренного треугольника. Тогда на основании выделения трех равных элементов треугольников в определенной конфигурации делался вывод о равенстве треугольников.

В доказательстве теоремы «*Две прямые, параллельные третьей, параллельны*» используется ссылка на аксиому о параллельных прямых. Поэтому перед началом объяснения формулировок и доказательства теоремы целесообразно повторить с учащимися определение параллельных прямых и аксиому «*Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной*». При этом полезно объяснить учащимся, что слова «*не более одной*» означают, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, параллельно ей можно провести либо одну прямую, либо ни одной, но нельзя провести две прямые.

Так как доказательство *признака параллельности прямых* достаточно простое, то его можно провести с включением учащихся во фронтальную работу.

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 95. Затем делается краткая запись условия и заключения теоремы.

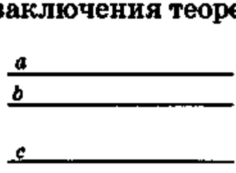


Рис. 95

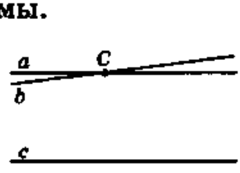


Рис. 96

Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$ (рис. 95).

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство.

Доказательство проводится *методом от противного.*

Допустим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке C, не лежащей на прямой c (рис. 96). Но по аксиоме о параллельных прямых *«Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной»*. Следовательно, пришли к противоречию с аксиомой и прямые a и b не пересекаются.

После доказательства *признака параллельности прямых* на закрепление его формулировки и метода доказательства можно предложить решить задачу 1 из учебника.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировку признака параллельности прямых. Затем на прямое закрепление выполнить задание 155.*

2) Понятия *углов, образованных при пересечении двух прямых секущей*, вначале полезно ввести без определений, только на наглядном уровне. Такой методический подход диктуется, с одной стороны, сложностью вербальных определений углов, а с другой — явно выраженным конструктивным характером самих определений. Объяснение определений *внутренних односторонних* углов можно провести по рисункам 97 и 98.

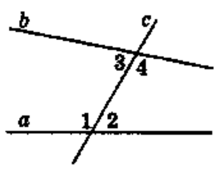


Рис. 97

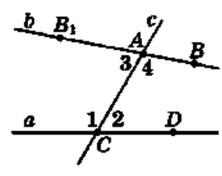


Рис. 98

При этом вначале по рисунку 97 полезно произвести следующую запись:

1. *внутренние односторонние углы*: $\angle 1$ и $\angle 3$;
$\angle 2$ и $\angle 4$.
2. *внутренние накрест лежащие углы*: $\angle 1$ и $\angle 4$;
$\angle 2$ и $\angle 3$.

Затем, отметив точки на прямых, ввести определения в соответствии с учебником (рис. 98). На рисунках хорошо видно, что *внутренние односторонние углы* лежат в одной полуплоскости относительно секущей, а *внутренние накрест лежащие углы* в разных полуплоскостях. После чего провести закрепление по рисунку 99 с помощью вопросов:

1. Назовите одну пару внутренних односторонних углов.
2. Назовите угол, который образует с углом CAB пару внутренних односторонних углов.
3. Назовите одну пару внутренних накрест лежащих углов.
4. Назовите угол, который образует с углом CAB пару внутренних накрест лежащих углов.
5. Назовите все пары *внутренних односторонних* углов.
6. Назовите все пары *внутренних накрест лежащих* углов.

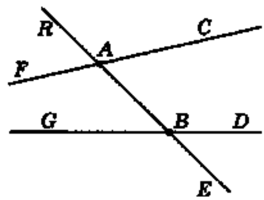


Рис.99

Необходимо требовать, чтобы учащиеся давали полные ответы на поставленные вопросы, не забывая указывать, при каких прямых и какой секущей рассматриваются углы.

При введении углов, образующихся при пересечении двух прямых и секущей, следует подчеркнуть, что названия этих углов относятся не к каждому отдельному углу, а, как и в случае смежных и вертикальных углов, к парам углов.

В рабочей тетради следует предложить учащимся на закрепление определений углов, образующихся при пересечении двух прямых и секущей, выполнить задания 155–158, которые аналогичны приведенным выше упражнениям.

3) В конце пункта «Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей» сформулированы утверждения:

«Если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны»;

«Если внутренние накрест лежащие углы равны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°»;

и наоборот:

«Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние накрест лежащие углы равны».

Перед доказательством утверждений полезно выполнить следующие задания, используя рисунок 100:

а) б)

Рис. 100

1. Два внутренних накрест лежащих угла (рис. 100, а) равны δ. Найдите величину углов, обозначенных x.
2. Сумма двух внутренних односторонних углов (рис. 100, б) равна 180°, один из них равен α. Найдите величину углов, обозначенных x и y.

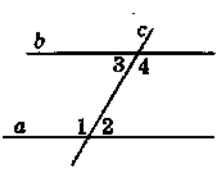


Рис. 101

Доказательство выше приведенных утверждений можно провести с участием учащихся устно, используя рисунок 101 и результаты выполнения предыдущих заданий. Необходимо по рисунку зафиксировать вывод из доказанного, а именно, если верно хоть одно из равенств $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ или $\angle 2 + \angle 4 = 180°$, то верны и все остальные равенства.

Примерное планирование изучения материала

В классе изложить весь теоретический материал пункта (§ 4, п. 29, 30); решить задачу 1 из учебника; дома — вопросы 1–3, решить задачу 3 и разобрать по тексту учебника решение задачи 4.

Дополнительные задачи

1. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Сделайте рисунок и назовите внутренние накрест лежащие углы:

а) при прямых AC и BD и секущей CD;

б) при прямых AC и BD и секущей AB;

в) при прямых AD и BC и секущей CD;

г) при прямых AD и BC и секущей AB.

Признаки параллельности прямых

Комментарий для учителя

Как уже было замечено выше, признаки параллельности прямых являются основополагающими в курсе планиметрии. Их прочное усвоение будет способствовать успешному усвоению тем «Четырехугольники» в курсе восьмого класса и «Подобие фигур» в курсе девятого класса.

Текущие результаты изучения пункта 31. Учащиеся должны:

– формулировать и объяснять формулировки признаков параллельности прямых;

– доказывать признаки параллельности прямых;

– решать задачи, применяя признаки параллельности прямых.

Методические рекомендации к изучению материала

1) В доказательстве *признаков параллельности двух прямых* используются ссылки на определения и аксиомы. Поэтому перед началом объяснения формулировок и доказательства теорем целесообразно повторить с учащимися эти определения и аксиомы.

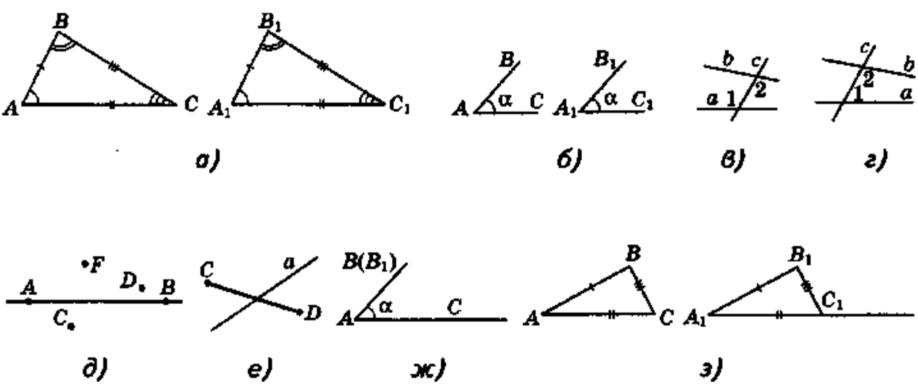


Рис. 102

При этом полезно в виде рисунков зафиксировать их на доске и сохранять до конца работы над каждой из теорем (рис. 102):

1. определение *равенства треугольников* (рис. 102, а),

2. определение *равенства углов* (рис. 102, б),

3. определение внутренних накрест лежащих углов (рис. 102, в),

4. определение внутренних односторонних углов (рис. 102, г),

5. аксиома принадлежности точек и прямых на плоскости (рис. 102, д),

6. аксиома *расположения точек относительно прямой на плоскости* (рис. 103, е),

7. аксиома *откладывания углов* (рис. 102, ж),

8. аксиома *существования треугольника, равного данному* (рис. 102, з).

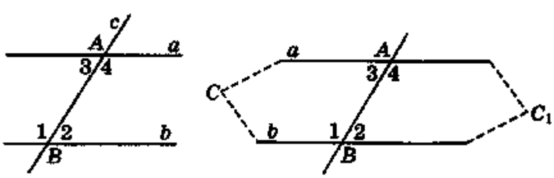
Так как доказательство *признаков параллельности прямых* длинное и достаточно трудное, то его лучше провести полностью самому учителю. Фронтальная работа при доказательстве теоремы может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от учащихся ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

2) При формулировке *признака параллельности прямых* следует обратить внимание учащихся на то, что в ней содержатся два утверждения, фактически две теоремы:

Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

При обсуждении условия теоремы полезно сначала выполнить рисунок, отвечающий условию (рис. 103, а), и кратко записать условие и заключение теоремы:



а) б)

Рис. 103

Дано: $\angle 1 = \angle 4$ (рис. 103, а).

Доказать: $a \parallel b$

Затем напомнить учащимся, что если $\angle 1 = \angle 4$, то равны и два других внутренних накрест лежащих угла,а каждая пара внутренних односторонних углов в сумме равна 180°.

3) Сначала методом от противного доказывается первая часть: «*Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны*».

Доказательство. Пусть прямые a и b образуют с секущей AB равные внутренние накрест лежащие углы, и допустим, что прямые a и b не параллельны, а значит, пересекаются в некоторой точке C. Выполним рисунок 103, б) и кратко запишем условия, соответствующие предположению: прямые a и b не параллельны:

Дано: $\angle 1 = \angle 4$, $a \nparallel b$ (рис. 103, в).

Секущая AB разбивает плоскость на две полуплоскости в силу аксиомы *расположения точек относительно прямой на плоскости*. В одной из них лежит точка пересечения C прямых a и b. В учебнике сказано: «Построим треугольник BAC_1, равный треугольнику ABC, с вершиной C_1 в другой полуплоскости». Более точно: по аксиоме *существования треугольника, равного данному*, существует треугольник BAC_1, равный треугольнику ABC, с вершиной C_1, лежащей в другой полуплоскости относительно прямой AB, чем вершина C. По условию внутренние накрест лежащие углы $\angle 1$ и $\angle 4$, при прямых a и b н секущей AB равны. Так как треугольники ABC и BAC_1 равны (рис. 103, б), то $\angle ABC$ и $\angle BAC_1$ равны, как соответствующие углы равных треугольников. При этом $\angle 1$ совпадает с $\angle ABC$, а $\angle 4$ – с $\angle BAC_1$ в силу аксиомы *откладывания углов*. Значит, прямая AC_1 совпадает с прямой a, а прямая BC_1 совпадает с прямой b. Получается, что через точки C и C_1 проходят две различные прямые a и b. А это невозможно по аксиоме *принадлежности точек и прямых на плоскости*. Значит, предположение, что прямые a и b не параллельны, не верно. Прямые a и b параллельны.

Для того чтобы учащиеся лучше запомнили доказательство, усвоили его основные идеи, полезно кратко записать его на доске:

1) $a \nparallel b$; и пересекаются в точке C.

2) $\Delta BAC_1 = \Delta ABC$ по аксиоме *существования треугольника, равного данному*.

3) $\angle 1 = \angle 4$ по условию.

4) $\angle ABC = \angle BAC_1$ так как $\Delta BAC_1 = \Delta ABC$.

5) $\angle 1$ совпадает с $\angle ABC$, а $\angle 4$ – с $\angle BAC_1$ в силу аксиомы *откладывания углов*.

6) Отсюда прямая AC_1 совпадает с прямой a, а прямая BC_1 совпадает с прямой b.

7) Значит, точки C и C_1 лежат одновременно и на прямой a, и на прямой b.

8) Предположение неверно, значит, $a \parallel b$.

Первая часть теоремы доказана, т.е., доказано, что признаком параллельности прямых является равенство внутренних накрест лежащих углов. При этом не важно, какие два накрест лежащих угла равны, так как мы доказывали, что, если накрест лежащие углы одной пары равны, то и накрест лежащие углы другой пары тоже равны.

4) Вторая часть теоремы: «*Если сумма внутренних односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны*» является следствием из первой.

Дано: $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ (рис. 103, а).

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство. Если у прямых a и b и секущей AB сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние накрест лежащие углы равны. Значит, по доказанному выше, прямые a и b параллельны.

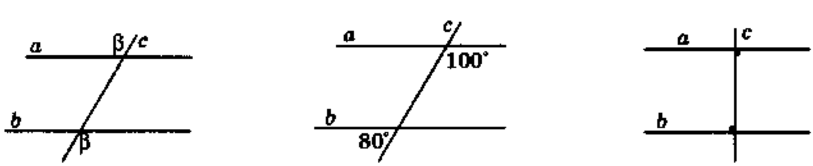
1) $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ по условию.

2) $\angle 1 = \angle 4$ по доказанному.

3) Значит, $a \parallel b$.

Вторая часть теоремы доказана, т.е., доказано, что признаком параллельности прямых является равенство суммы пары внутренних односторонних углов 180°.

5) В качестве упражнений на закрепление доказанных признаков можно использовать следующее задание:



а) б) в)

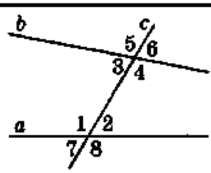
Рис. 104

Используя данные рисунков (рис. 104, а — в), докажите, что прямые a и b параллельны.

После выполнения задания по рисунку 104, в) следует сделать вывод: «*Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны*», который является следствием из теоремы о *признаках параллельности прямых*.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировки признаков параллельности прямых. *Затем на прямое закрепление выполнить задания 158 и 159, при этом рекомендованные выше задания по рисунку 104, а) и б) можно пропустить, но задание 104, в) следует обязательно выполнить.*

2) Кроме *внутренних накрест лежащих* и *внутренних односторонних* углов, при пересечении двух прямых секущей теперь выделяется еще одна пара углов, которые называются *соответственными* углами. Определение *соответственных* углов является конструктивным и вводится только на наглядном уровне. Его объяснение можно провести по рисунку 105. При этом полезно произвести следующую запись:



1) внутренние односторонние углы: $\angle 1$ и $\angle 3$; $\angle 2$ и $\angle 4$;

2) внутренние накрест лежащие углы: $\angle 1$ и $\angle 4$; $\angle 2$ и $\angle 3$;

3) соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$.

Рис. 105

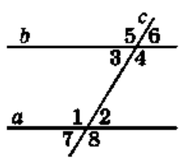


Рис. 106

Затем вместе с учащимися по рисунку 106 выявить связь *соответственных* углов с *внутренними накрест лежащими* углами:

«Если равны соответственные углы, то равны и внутренние накрест лежащие углы», и наоборот: *«Если равны внутренние накрест лежащие углы, то равны и соответственные углы»*.

И, наконец, главный вывод, или еще один *признак параллельности прямых*: *«Если соответственные углы равны, то прямые параллельны»*.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради заполнить таблицу, аналогичную рисунку 105 и на закрепление выполнить задания 161.

3) В задаче 8, решение которой следует разобрать с учащимися по тексту учебника, доказывается *существование прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку*. Аксиома (*основное свойство*) *параллельных прямых* утверждает, что: *«Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной»*.

Из аксиомы следует, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, параллельно ей можно провести либо одну прямую, либо ни одной (*«не более одной»*). А из решения задачи 8 следует, что такую прямую, *«можно провести»*. Значит, приходим к выводу: *«Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую и только одну»*.

Примерное планирование изучения материала

В классе изложить весь теоретический материал (§ 4, п. 31); решить задачу 8; дома — вопросы 4–6, задачу 9, 11.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, если $\Delta ABC = \Delta CDA$ (рис. 107).

2. Докажите, что $d \parallel h$ и $g \parallel f$, если $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (рис. 108).

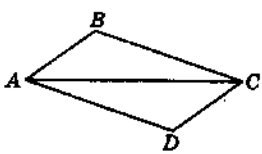


Рис. 107

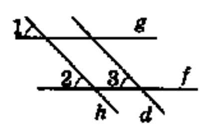


Рис. 108

3. В треугольниках ABC и ABC_1 проведены высоты CD и C_1D_1. Докажите, что прямые CD и C_1D_1 параллельны или совпадают.

4. При пересечении двух прямых a и b третьей прямой c образуются восемь углов. Четыре из них равны 80° , другие четыре — 100°. Следует ли отсюда, что прямые a и b параллельны?

Решение. Нет, не следует. Прямые a и b могут быть параллельными (рис.109, а), а могут образовывать равнобедренный треугольник, боковые стороны которого лежат на прямых a и b, а основание лежит на прямой c (рис.109, б).

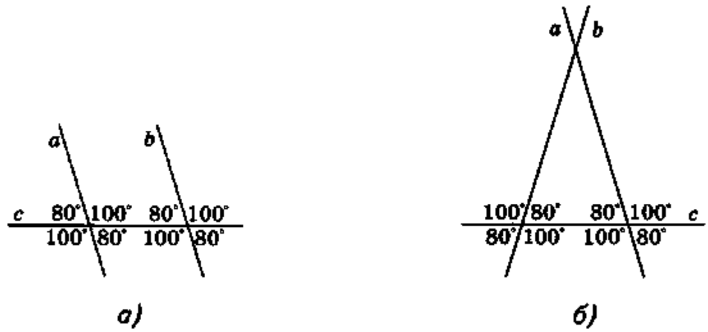


Рис. 109

Свойство углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

Комментарий для учителя

Как уже было замечено выше, признаки параллельности прямых и свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, являются основополагающими в курсе планиметрии. Как и признаки параллельности прямых, они играют значительную роль при изучении тем «Четырехугольники» в курсе восьмого класса и «Подобие фигур» в курсе девятого класса. Кроме того, признаки параллельности прямых и свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей будут широко применяться в стереометрии.

Текущие результаты изучения пункта 32. Учащиеся должны:

– формулировать и объяснять формулировки свойств углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей;

– доказывать свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей;

– решать задачи, применяя свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Приступая к формулировке свойств углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, полезно еще раз сформулировать два *признака параллельности прямых*, сделать чертеж (рис.110) и краткую запись условий и заключения теорем.

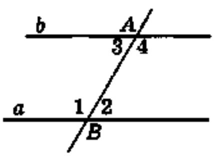


Рис. 110

Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Затем предложить учащимся сформулировать самостоятельно утверждения, обратные признакам параллельности прямых, то есть свойства *углов при параллельных прямых*. При этом, используя данные чертежа (рис. 110), выполнить краткую запись условия и заключения теорем:

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

При желании учитель может сделать плакат как на рисунке 111.

Прямая: *Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.* Дано: $\angle 1 = \angle 4$ Доказать: $a \parallel b$ Обратная: *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.* Дано: $a \parallel b$ Доказать: $\angle 1 = \angle 4$	Прямая: *Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.* Дано: $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ Доказать: $a \parallel b$ Обратная: *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.* Дано: $a \parallel b$ Доказать: $\angle 1 + \angle 3 = 180°$

Рис. 111

2) Доказательство теоремы о *свойствах углов при параллельных прямых* достаточно простое, поэтому его лучше провести в форме беседы с привлечением учащихся. Учебный материал данного пункта дает благодатную возможность тщательно отработать введенные в § 3 понятия *прямой* и *обратной* теоремы.

Доказательство.

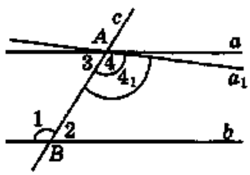


Рис. 112

1. Проведем через точку A прямую a_1 так, чтобы $\angle 1 = \angle 4_1$ (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей c с прямыми a_1 и b, были равны) (рис. 112).
2. Так как $\angle 1 = \angle 4_1$, то $a_1 \parallel b$ (признак *параллельности прямых*).
3. По условию $a \parallel b$.
4. Через точку A проходят и прямая $a \parallel b$, и прямая $a_1 \parallel b$.
5. Прямая a совпадает с прямой a_1 по аксиоме параллельных прямых (через точку A может проходить только одна прямая, параллельная прямой b).
6. Отсюда $\angle 1 = \angle 4$ (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей c с параллельными прямыми a и b, равны).

Доказательство второй части теоремы аналогично и его можно предложить учащимся в качестве задания на закрепление метода доказательства теоремы.

3) В качестве упражнений на закрепление доказанной теоремы можно предложить следующие задания:

1. На рисунке 113 $d \parallel f$; $f \parallel h$; $\angle 1 = 24°$. Чему равны $\angle 2$ и $\angle 3$?

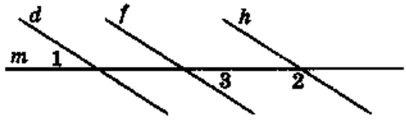


Рис. 113

2. По рисунку 114 найдите градусную меру угла, который образует с углом ABC, равным 58°, пару внутренних односторонних углов.
3. По рисунку 114 найдите градусную меру угла, который образует с углом ABC, равным 58°, пару внутренних накрест лежащих углов.
4. По рисунку 114 найдите градусную меру угла, который образует с углом ABC, равным 58°, пару соответственных углов.

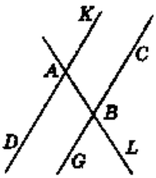


Рис. 114

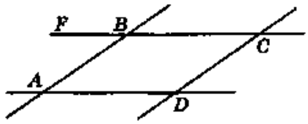


Рис. 115

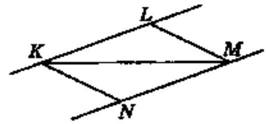
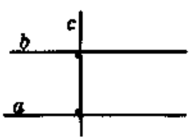


Рис. 116

5. Найдите градусную меру углов: DAB, ABC, BCD и CDA, если $\angle ABF = 29°$, а
$AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$ (рис. 115).
6. Равные отрезки KL и NM лежат на параллельных прямых, KM — секущая. Докажите, что $\Delta KLM = \Delta MNK$ (рис. 116).

После этого полезно решить задачу 4 из дополнительных задач.

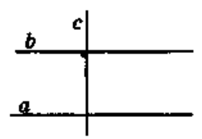
При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировки свойств углов при параллельных прямых. Затем на прямое закрепление выполнить задания 162–165, которые полностью совпадают с приведенными выше заданиями на закрепление доказанной теоремы. При этом на их решение будет затрачено значительно меньше времени. Кроме того, у учащихся останутся чертежи и условия даже тех задач, которые решались устно. А задачу 165 рекомендуется решить письменно.



Дано: $a \perp c$, $b \perp c$.
Доказать: $a \parallel b$

Рис. 117

4) Доказательства следствий из теорем о *признаках параллельности прямых* и *свойствах углов при параллельных прямых* полезно организовать в форме фронтальной работы с классом.



Дано: $a \parallel b$, $b \perp c$.
Доказать: $a \perp c$

Рис. 118

Особое внимание следует обратить на формулировки прямых и обратных утверждений, выполнив вместе с учащимися рисунки и краткие записи условий и заключений (рис. 117 и 118).

5) В задаче 17 продолжается исследование вопроса о перпендикулярности и параллельности прямых, а именно, существование и единственность перпендикуляра, проведенного через данную точку к данной прямой, признаки параллельности прямых. Поэтому полезно разобрать эту задачу на втором уроке и провести обобщение знаний учащихся о перпендикулярности и параллельности прямых. Для этого полезно сделать плакат, как на приведенном рисунке 119, или выполнить рисунки на доске.

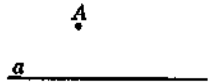
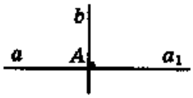
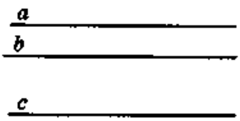
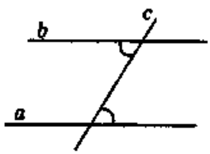
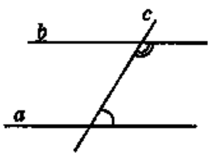
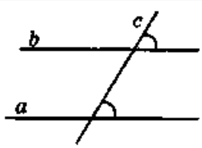
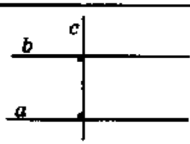
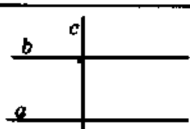
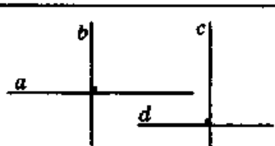
	Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую, и только одну
	Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну
	Две прямые, параллельные третьей, параллельны
	Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны
	Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны
	Если соответственные углы равны, то прямые параллельны
	Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны
	Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой
	Если две прямые параллельны перпендикулярным прямым, то они сами перпендикулярны

Рис. 119

Решение задачи 13 очень важно для доказательства теоремы о *сумме углов треугольника*, поэтому полезно предложить учащимся разобрать ее решение по тексту учебника дома и записать его в тетрадь. В классе сделать краткую запись решения с выполнением рисунка на доске при проверке домашнего задания на том уроке, на котором будет доказана теорема о *сумме углов треугольника*.

> *При работе с тетрадями на втором уроке после разборе задачи 17 полезно выполнить задачу 166, в которой требуется заполнить таблицу, являющуюся копией таблицы на рисунке 119. Затем на применение признаков параллельности прямых можно рекомендовать решить задачи 167 и 168, а на применение свойств углов при параллельных прямых можно рекомендовать решить задачу 169. В задачах 165 и 167 используются умения учащихся применять ранее изученные признаки равенства треугольников, и, кроме того, они позволяют применить признаки параллельности прямых и свойства углов при параллельных прямых в более сложной ситуации. На данном этапе изучения геометрии эти задачи являются задачами продвинутого уровня, а в конце изучения курса геометрии седьмого класса они станут задачами обязательного уровня подготовки учащихся.*

6) Предлагаемое ниже планирование рекомендует проверку усвоения учащимися темы «Параллельные прямые» провести на втором уроке в виде самостоятельной работы в форме теста. При разборе решения заданий работы следует обратить внимание на то, что в первом задании лишние данные. Такие задания полезны тем, что позволяют в краткой форме проверить насколько сознательно учащиеся дают ответ. Во втором задании один из ответов «Такая ситуация невозможна» требует комментария, в котором следует сообщить, что задача может и не иметь ответа. В третьем задании необходимо сначала установить, что данные прямые параллельны, а затем найти угол.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе изложить весь теоретический материал пункта (§ 4, п. 32); дома — вопросы 7, 8, задачи 12, 14, 17.

На втором уроке в классе: решить задачи 3 и 4 из дополнительных задач к § 4 п. 31, задачи 2 и 3 из дополнительных задач к § 4 п. 32; провести самостоятельную работу; дома — задачи 13, 15, 16.

Дополнительные задачи

1. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC (рис. 120). Известно, что внутренние накрест лежащие углы при прямых AB и MK и секущей AC равны. Докажите,что треугольник KMC равнобедренный.

2. Боковые стороны равнобедренного треугольника ABC (рис. 121) пересекает прямая MK, параллельная основанию AC. Докажите, что $BM = BK$.

3. Треугольники AOC и BOD равнобедренные с основаниями AC и BD соответственно. Докажите, что $AC \| BD$ (рис. 122).

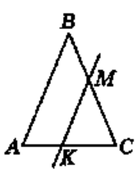


Рис. 120

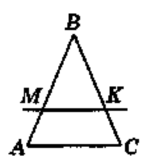


Рис. 121

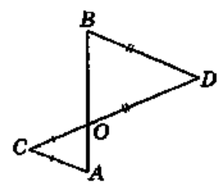


Рис. 122

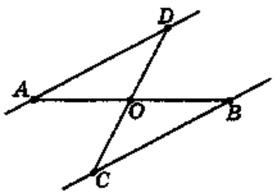
4. Чему равны внутренние односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей, если один из них в два раза меньше другого?

5. Докажите, что прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC, перпендикулярна его медиане BD.

Самостоятельная работа по теме «Параллельные прямые»

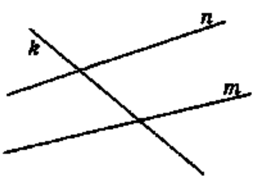
Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

1-й вариант



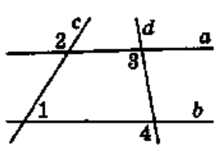
1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Известно, что точка O — середина отрезка AB, а прямые AD и CB параллельны. Определите, чему равен отрезок AD, если $OC = 8$ см, а $CB = 13$ см.

Ответ: ____________________



2. Сумма двух односторонних углов, образованных пересечением прямых m и n секущей k, равна 148°. Определите взаимное расположение прямых n и m.

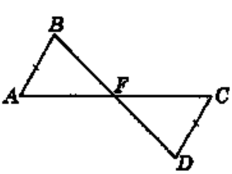
1. Прямые n и m пересекаются.
2. Прямые n и m параллельны.
3. Такая ситуация невозможна.



3. Дано: $\angle 1 = 55°$; $\angle 2 = 125°$; $\angle 3 = 123°$. Найдите $\angle 4$.

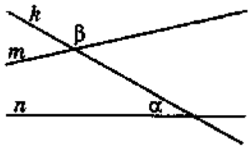
Ответ: ____________________

2-й вариант



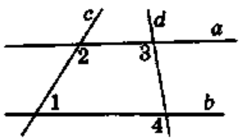
1. В треугольниках ABF и CDF стороны $AB = DC$ и лежат на параллельных прямых. Определите, чему равен отрезок AC, если $FA = 9$ см, а $AB = 8$ см.

Ответ: ____________________



2. Угол α, образованный при пересечении прямых *n* и *k*, равен 30°, а угол β, образованный при пересечении прямых *m* и *k*, на 120° больше угла α. Определите взаимное расположение прямых *n* и *m*.

1. Прямые *n* и *m* пересекаются.
2. Прямые *n* и *m* параллельны.
3. Такая ситуация невозможна.



3. Дано: $\angle 1 = 45°$; $\angle 2 = 135°$; $\angle 3 = 124°$. Найдите $\angle 4$.

Ответ: ____________________

Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника

Комментарий для учителя

Теорема о сумме углов треугольника вместе с признаками равенства треугольников, признаками и свойствами параллельных прямых составляет основополагающее содержание геометрии. После изучения данной темы значительно увеличивается объем задач на вычисления. В дальнейшем при изучении темы «Сумма углов многоугольника» будет полезно показать, что теорема о сумме углов треугольника является ее частным случаем.

Текущие результаты изучения пункта 33 и 34. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках внешний угол треугольника;

– формулировать и объяснять формулировки теорем о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника;

– доказывать теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника;

– решать задачи, применяя теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1) В доказательстве теоремы о *сумме углов треугольника* используются ссылки на результаты, доказанные в задаче 13. Поэтому начать работу над теоремой о *сумме углов треугольника* следует с разбора решения задачи 13 при проверке домашнего задания. При этом необходимо сделать краткую запись условия и заключения задачи с выполнением рисунка на доске, которые полезно сохранить до конца доказательства теоремы.

> Задача 13. Прямые AC и BD параллельны, причем точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC (рис. 123). Докажите, что:
> 1) углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие относительно секущей BC;
> 2) луч BC проходит между сторонами угла ABD;
> 3) $\angle CAB$ и $\angle DBA$ — внутренние односторонние углы относительно секущей AB.

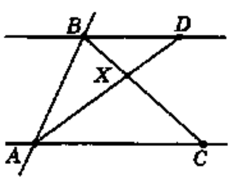


Рис. 123

Дано: $AC \parallel BD$.
BC — секущая
A и D лежат в разных полуплоскостях относительно BC

Доказать: $\angle DBC$ и $\angle ACB$ внутренние накрест лежащие;
$\angle CAB$ и $\angle DBA$ внутренние односторонние;
BC проходит между сторонами $\angle ABD$.

Доказательство. 1) $\angle DBC$ и $\angle ACB$ внутренние накрест лежащие, так как по условию A и D лежат в разных полуплоскостях относительно BC.

2) Точки B и D лежат на прямой BD, а точки A и C лежат на параллельной ей прямой AC. Значит, в силу решения задачи 4 из учебника отрезок BC пересекает отрезок AD. Точки A и D лежат на сторонах $\angle ABD$. Значит, по определению луч BC проходит между сторонами $\angle ABD$.

3) $\angle CAB$ и $\angle DBA$ внутренние односторонние потому, что точки C и D лежат по одну сторону от секущей AB, а именно в полуплоскости, где лежит точка X пересечения отрезков BC и AD.

2) Если уровень геометрической подготовки класса позволяет, то можно при доказательстве теоремы привлечь учащихся, активизируя их знания определений и свойств *внутренних накрест лежащих* и *внутренних односторонних* углов.

Изучение теоремы начинается с ее формулировки, выполнения чертежа 124 по условию теоремы и с краткой записи условия и заключения. Необходимо заметить, что для проведения обоснований выполняется дополнительное построение.

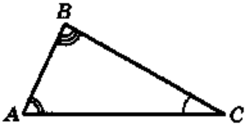


Рис. 124

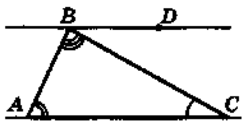


Рис. 125

Дано: ΔBAC (рис. 124)

Доказать: $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

Доказательство.

1. $BD \parallel AC$, $D \in BD$, A и D лежат в разных полуплоскостях относительно BC (рис. 125);

2. $\angle CBD = \angle BCA$, как *внутренние накрест лежащие*, так как $BD \parallel AC$ и BC — секущая (в силу задачи 13);

3. отсюда $\angle ABC + \angle BCA = \angle ABD$;

4. $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle ABD + \angle CAB$;

5. $\angle ABD$ и $\angle CAB$ — *внутренние односторонние*, так как $BD \parallel AC$ и AB — секущая (в силу задачи 13);

6. отсюда $\angle ABD + \angle CAB = 180°$, а, значит, и $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$.

В качестве упражнений на непосредственное применение теоремы *о сумме углов треугольника* можно использовать задачи 18 и 19 из учебника. Затем разобрать решение задачи 30 по тексту учебника, напомнив учащимся, что ранее было доказано, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о сумме углов треугольника. *Затем на прямое закрепление выполнить задания 170–175, которые вполне могут заменить рекомендованные задачи из учебника. При этом у учащихся останутся чертежи и условия задач. Перед решением задачи 30 из учебника можно предложить учащимся посмотреть решение задачи 129 из рабочей тетради.*

3) Доказательство *следствия из* теоремы о *сумме углов треугольника* можно предварить решением задачи 20 из учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради перед доказательством следствия из теоремы о сумме углов треугольника полезно предложить учащимся разобрать по тексту тетради решение задачи 176, а затем выполнить задачу 177.

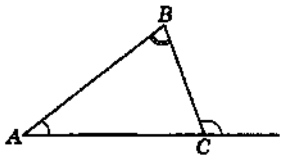


Рис. 126

4) Понятие *внешний угол треугольника* полезно ввести на наглядном уровне. Продолжим сторону AC треугольника ABC за точку C (рис. 126). Получим при вершине C еще один угол. Он называется *внешним углом треугольника.* С целью подведения учащихся к определению *внешнего угла треугольника* следует обратить их внимание на важный момент.

Угол треугольника при вершине и внешний угол треугольника при той же вершине являются смежными углами.

После этого сформулировать определение *внешнего угла треугольника.* Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *внешнего угла треугольника* и умения находить его в стандартных ситуациях выполнить работу по готовым чертежам, (например, как на рисунке 127, включив в их набор контрпример в):

1. На рисунках для каждого треугольника найдите внешний угол.
2. Объясните, почему эти углы являются внешними.
3. Определите, являются ли углы на рисунке 127, в) внешними углами треугольника и почему.

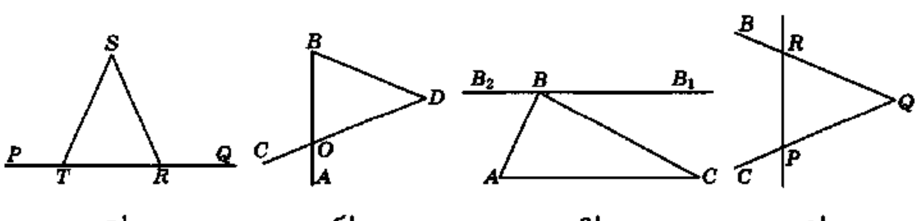


Рис. 127

Вместе с данным в учебнике определением *внешнего угла треугольника* полезно дать также его конструктивное определение.

Поскольку *внешний угол* — это угол, смежный с внутренним углом при общей вершине, то его построение сводится к построению луча, дополнительного к лучу с началом в данной вершине треугольника и содержащему сторону треугольника, т.е. к продолжению стороны треугольника за его вершину. При этом следует обратить внимание на то, что при каждой вершине треугольника можно построить два внешних угла, продолжая одну из двух сторон внутреннего угла треугольника. Они представляют собой пару вертикальных углов, и, значит, равны между собой.

> *При работе с тетрадями для проверки усвоения учащимися понятия внешнего угла треугольника полезно выполнить упражнение 180, которое является копией задания, приведенного выше на рисунке 127.*

5) В доказательстве теоремы *о внешнем угле треугольника* используются ссылки на определение внешнего угла треугольника, на теорему о сумме углов треугольника и свойство смежных углов; оно несложное и может быть проведено самими учащимися под руководством учителя.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

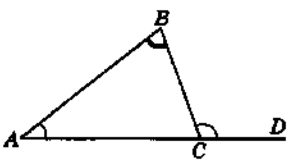


Рис. 128

Дано: ΔBAC (рис. 128)
$\angle BCD$ — *внешний угол*

Доказать: $\angle ABC + \angle BAC = \angle BCD$

Доказательство.

1. $\angle BCD = 180° - \angle BCA$ по теореме о смежных углах;

2. Но $180° - \angle BCA = \angle ABC + \angle BAC$ по теореме о сумме углов треугольника;

3. значит, $\angle BCD = \angle ABC + \angle BAC$.

В качестве упражнений на непосредственное применение теоремы *о внешнем угле треугольника* можно устно с выполнением чертежа на доске решить задачи 33 и 34 из учебника. Решение задачи 35, данное в тексте учебника, полезно предложить учащимся разобрать дома, затем по аналогии решить задачу 36.

> *В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о внешнем угле треугольника. Затем на прямое закрепление выполнить задания 181–187, которые вполне могут заменить рекомендованные задачи 33 и 34 из учебника.*

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта (§ 4, п. 33), решить задача 18 (1, 4), 19 (1, 3), 20 (2), 30; дома — вопросы 9, 10, задачи 21, 22 (1, 3), 23 (1, 2), 26.

На втором уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта (§ 4, п. 34), решить задачи 33, 35, 39; дома — вопросы 11–13, задачи 32, 34, 36.

На третьем уроке в классе: провести самостоятельную работу в форме теста; решить задачи 27(1, 3), 28, 40; дома — задачи 24, 25, 27 (2).

Указания к задачам

Задачи 24 и 32. Необходимо обосновать, что данный угол не может быть углом при основании треугольника.

В задаче 25 рассматриваются два случая: данный угол является углом при вершине равнобедренного треугольника или при его основании.

В задаче 40 необходимо обосновать, что данные углы не смежные.

Большинство задач, относящихся к пунктам 33 и 34, вычислительные и решаются с помощью составления уравнения.

В задаче 27 для составления уравнения используются: свойство углов при основании равнобедренного треугольника, понятие биссектрисы угла и теорема о сумме углов треугольника или свойство внешнего угла. Рассмотрим общий случай, когда $\angle ADC = \alpha$ (рис. 129). В силу обозначений, приведенных на рисунке,

$2x + x = 180° - \alpha$; отсюда $x = 60° - \frac{1}{3}\alpha$; $\angle BAC = \angle BCA = 2x =$

$= 120° - \frac{2}{3}\alpha$; $\angle ABC = \alpha - x = \alpha - 60° + \frac{1}{3}\alpha = \frac{4}{3}\alpha - 60°$.

В задачах 35 (решение приведено в тексте учебного пособия) и 36 обосновывается

положение основания высоты в остроугольном треугольнике и высоты, проведенной в тупоугольном треугольнике не из вершины тупого угла.

Решение задачи 39 следует из рисунка 130.

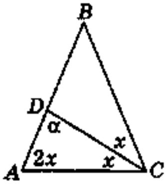


Рис. 129

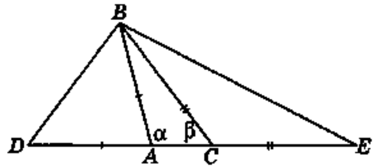


Рис. 130

Дополнительные задачи

1. Определите вид треугольника по сторонам и углам, если один его угол равен 40°, а другой — 100°.

2. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, а $\angle C = 30°$. Определите $\angle A$ и $\angle B$.

3. Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при основании равен 105°.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине B равен 108°. Найдите углы треугольника.

5. (Обратная к задаче 37 из учебника.) Докажите, что, если биссектриса одного из внешних углов треугольника параллельна противоположной стороне треугольника, то этот треугольник равнобедренный.

6. (Обратная к задаче 28 из учебника.) Найдите углы треугольника ABC, если известно, что биссектриса угла A делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника.

Решение. Возможны два случая: 1) см. задачу 3; 2) прямоугольный равнобедренный треугольник.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите углы треугольника ABC, если $AD = AC = DB$.

Решение. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$ (рис. 131). Тогда: $\angle DAC = \angle DAB = \angle ABC = \alpha$, значит, $\angle ADC = \angle ACB = 2\alpha$. $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$. $\angle BAC = 72°$, $\angle ABC = 36°$, $\angle ACB = 72°$.

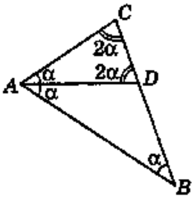


Рис. 131

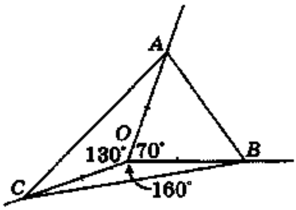


Рис. 132

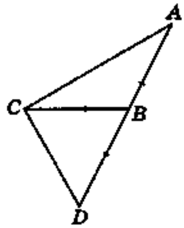


Рис. 133

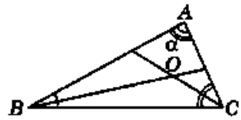


Рис. 134

8. Три луча, на которых отмечены точки A, B и C, имеют общее начало точку O. Известно, что $OA = OB = OC$, и $\angle AOB = 70°$, $\angle BOC = 160°$, $\angle COA = 130°$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение задачи следует из рисунка 132.

9. Докажите, что если в треугольнике ACD медиана, выходящая из вершины C, в два раза меньше стороны AD, то $\angle ACD = 90°$.

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$ (рис. 133). Тогда $\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle BDC = \angle BCD = \frac{1}{2}\alpha$.

Значит, $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = (90° - \frac{1}{2}\alpha) + \frac{1}{2}\alpha = 90°$.

10. Биссектрисы углов ABC и ACB треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если $\angle BAC = \alpha$.

Решение. На рисунке 134 $\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$.

11. Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D, а биссектриса угла, смежного с углом A, пересекает продолжение BC за точку C в точке E. Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Пусть $\angle BAC = x$, тогда $\angle ADC = x$. Внешний угол треугольника ACD при вершине C равен $2x$ (рис. 135). Этот угол есть половина внешнего угла С треугольника ABC. Значит, $\angle AEC = \angle ACE = 4x$, $\angle EAC = 180° - 8x$. Но $\angle EAC$ есть половина внешнего угла при вершине А, т.е. $\angle EAC = \frac{1}{2}(180° - x)$; $180 - 8x = 90 - \frac{x}{2}$; $-\frac{x}{2} = 90 - 8x$; $7{,}5x = 90$; $x = 12$.

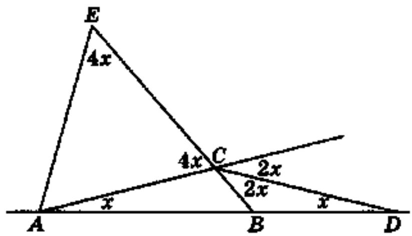


Рис. 135

Самостоятельная работа по теме «Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника»

Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

1-й вариант

1. Углы треугольника относятся, как 2:3:5. Найдите его меньший угол.

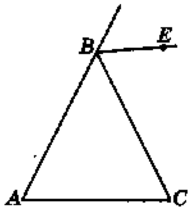
Ответ: ______________________________

2. В равнобедренном треугольнике внешний угол при основании равен 140°. Найдите внутренний угол при вершине, противолежащей основанию.

Ответ: ______________________________

3. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов равна третьему углу.

1. Треугольник — остроугольный.
2. Треугольник — прямоугольный.
3. Треугольник — тупоугольный.



4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BE внешнего угла при вершине B. Определите взаимное расположение прямых BE и AC.

1. Прямые BE и AC перпендикулярны.
2. Прямые BE и AC пересекаются, но не перпендикулярны.
3. Прямые BE и AC параллельны.

2-й вариант

1. Один из углов равнобедренного треугольника на 30° больше другого. Найдите углы треугольника.

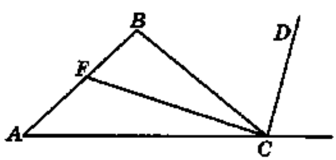
Ответ: ______________________

2. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и C соответственно равны 150° и 100°. Найдите угол B треугольника.

Ответ: ______________________

3. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов меньше третьего угла.

1. Треугольник — остроугольный.
2. Треугольник — прямоугольный.
3. Треугольник — тупоугольный.



4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CF и CD внутреннего и внешнего углов при вершине C. Определите взаимное расположение прямых.

1. Прямые CF и CD перпендикулярны.
2. Прямые CF и CD пересекаются, но не перпендикулярны.
3. Прямые CF и CD параллельны.

Прямоугольный треугольник

Комментарий для учителя

Теорема о сумме углов треугольника вместе с признаками равенства треугольников позволяют доказать признаки равенства прямоугольных треугольников, как частный случай признаков равенства произвольных треугольников. После изучения данной темы значительно увеличивается объем задач на вычисления и доказательства, особенно полезны задачи на определения видов треугольников по углам: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

Текущие результаты изучения пункта 35. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках прямоугольный треугольник, катет и гипотенузу, равные прямоугольные треугольники;

– объяснять термины «катет» и «гипотенуза»;

– формулировать и объяснять формулировки признаков равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°;

– доказывать признаки равенства прямоугольных треугольников;

– решать задачи, применяя признак равенства прямоугольных треугольников;

– определять вид треугольника по углам, применяя теорему о сумме углов треугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1) Терминология, связанная с определением видов треугольников по углам, знакома учащимся по курсу геометрии 5–6 классов.

При введении определения *прямоугольного треугольника* основное внимание необходимо направить на понимание того, что, если в условии сказано: «*Треугольник ABC прямоугольный...*», то учащиеся должны *понимать*, что у него «*один угол прямой и два острых и что сумма острых углов равна* 90°».

При введении определения *остроугольного треугольника* основное внимание необходимо направить на понимание того, что, если в условии сказано: «*Треугольник ABC остроугольный...*», то учащиеся должны *понимать*, что у него «*все углы острые и что каждый угол меньше* 90°».

При введении определения *тупоугольного треугольника* основное внимание необходимо направить на понимание того, что, если в условии сказано: «*Треугольник ABC тупоугольный...*», то учащиеся должны *понимать*, что у него «*один угол тупой и два острых и что сумма острых углов меньше* 90°».

В учебнике вводятся названия сторон прямоугольного треугольника «*катет*» и «*гипотенуза*». Поэтому, если в условии сказано: «*У треугольника ABC: $\angle C$ — прямой...*», то учащиеся должны *уметь* сделать заключение о том, что у него *BC* и *AC* — *катеты*, а *AB* — *гипотенуза и является стороной, противолежащей прямому углу*».

Отработка этого навыка будет проходить в процессе изучения как данной темы, так и, что наиболее важно, темы: «Теорема Пифагора».

Для проверки правильности усвоения учащимися понятий *прямоугольного треугольника*, *катет* и *гипотенуза* и умения находить его в стандартных ситуациях выполнить работу по готовым чертежам (например, как на рисунках 136 и 137).

> 1. В треугольнике *MNK* проведена высота *ND*. Назовите получившиеся при этом прямоугольные треугольники, их гипотенузы и катеты (рис. 136).
> 2. На рисунке 137 отрезки *AB* и *CD* перпендикулярны прямой *FG*. Найдите прямоугольные треугольники и назовите их гипотенузы и катеты.

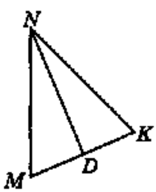


Рис 136

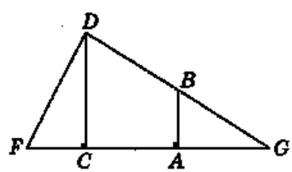


Рис 137

2) Утверждения:

1. «У прямоугольного треугольника один угол прямой и два острых»;

2. «Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°»,

выражающие свойства острых углов прямоугольных треугольников, являются прямыми следствиями из теоремы *о сумме углов треугольника* и очень просто доказываются. Их доказательства можно провести фронтально.

Для закрепления доказанных свойств можно предложить задания:

> 1. Определите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них в два раза больше другого.
> 2. Докажите, что, если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то и другие острые углы данных прямоугольных треугольников равны.

3) Перед формулировкой *признаков равенства прямоугольных треугольников* полезно вспомнить общие признаки равенства треугольников, принимая во внимание, что у прямоугольных треугольников один из углов всегда прямой и, значит, у двух прямоугольных треугольников всегда есть по одному равному углу. Кроме того, при определении пары равных треугольников следует применять изученные свойства острых углов прямоугольных треугольников. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 138:

> Укажите, на каких рисунках есть равные треугольники и объясните почему.

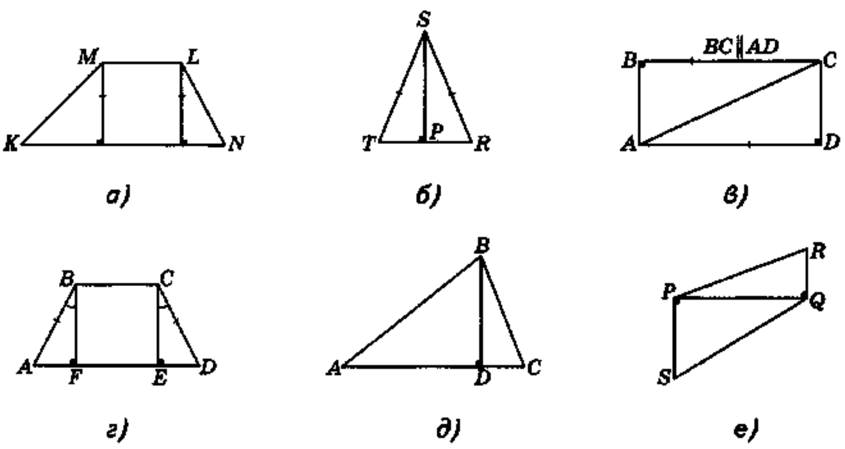


Рис. 138

<u>Ответы</u>: 1. На рисунке б), так как высота равнобедренного треугольника является биссектрисой и медианой, то $\Delta TSP = \Delta RSP$ либо *по двум сторонам и углу между ними*, либо *по трем сторонам*.

2. На рисунке в), так как $\angle BCA = \angle DAC$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, то $\Delta ABC = \Delta CDA$, либо по двум сторонам и углу между ними, либо по стороне и прилежащим к ней углам.

3. На рисунке г) так как $\angle ABF = \angle DCE$ то $\Delta BAF = \Delta CDE$, по стороне и прилежащим к ней углам.

В рабочей тетради задание 188 является аналогом работы с плакатом, что поможет сэкономить время, как при работе с классом на уроке, так и при подготовке к нему.

Решение задачи 43, данное в учебнике, лучше рассмотреть после рассмотрения признаков равенства прямоугольных треугольников, тем более что в нем используется то же дополнительное построение, что и в задаче 29 (§ 3, п. 27).

Перед тем как сформулировать *признаки равенства прямоугольных треугольников*, полезно для того, чтобы учащиеся поняли особенности признаков равенства прямоугольных треугольников выяснить вопрос: как изменяются признаки равенства произвольных треугольников, если треугольники по определению является прямоугольными, т.е. у прямоугольных треугольников всегда есть один равный элемент, а именно прямой угол. Попробуем вместе с учащимися сформулировать *признаки равенства треугольников для прямоугольных треугольников*.

<u>Первый признак равенства произвольных треугольников:</u>

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Так как треугольники прямоугольные, <u>то первый признак равенства для прямоугольных треугольников</u>:

Если катеты одного прямоугольного треугольника равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

<u>Второй признак равенства произвольных треугольников.</u>

Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Так как треугольники прямоугольные, то один равный угол, прилежащий к катету, а именно прямой, уже есть, значит, необходимо равенство одного из острых углов, так как по свойству острых углов прямоугольных треугольников: «*если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то и другие острые углы данных прямоугольных треугольников равны*». Отсюда второй признак равенства для прямоугольных треугольников имеет три варианта:

Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответствующим катету и противолежащему ему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответствующим катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства произвольных треугольников.

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Однако сформулировать признак равенства прямоугольных треугольников, аналогичный третьему признаку равенства произвольных треугольников мы не можем. Но для прямоугольных треугольников существует свой специальный признак равенства по гипотенузе и катету. Сформулируем его.

Затем заметим, что в учебнике приведены только три признака, но они позволяют всегда обосновывать равенство прямоугольных треугольников.

Сформулировав *признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету*, следует предложить учащимся посмотреть по записи в тетради или по тексту учебника доказательство задачи 29 (§ 3, п. 27). Делать запись на доске совершенно не обязательно, достаточно выполнить чертеж, но в тетрадях учащихся должно быть оформление задачи, выполненное при изучении темы «Признаки равенства треугольников».

Сформулированный и доказанный в задаче 29 (§ 3, п. 27) учебника *признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету* соответствует третьему признак равенства треугольников. Но на данном этапе обучения говорить учащимся об этом преждевременно. Его доказательство достаточно искусственно, но позднее в восьмом классе этот факт можно будет доказать просто, используя теорему Пифагора.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует записать формулировки признаков равенства прямоугольных треугольников. Затем в ходе обсуждения вопроса: как изменяются признаки равенства треугольников, если треугольник по определению является прямоугольным, вместе с учащимися доказать признаки равенства прямоугольных треугольников и решить задачи 189 и 190.

4) В задаче 43 из учебника (§ 4, п. 35) сформулировано и доказано одно из важных *свойств прямоугольного треугольника, у которого один угол равен* 30°. В учебнике этому свойству уделено мало внимания и практически нет задач на его отработку. Однако это свойство имеет большое пропедевтическое значение и найдет самое широкое применение при решении задач, как в планиметрии, так и в стереометрии. Полезно доказать еще одно свойство прямоугольного треугольника: *«медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе равна половине гипотенузы»*, которое является обратным утверждению задачи 47. Поэтому второй урок посвятите решению задачи 47 и доказательству выше сформулированного утверждения, а также решению дополнительных задач. Сильным учащимся можно предложить задачи 7 и 8 из дополнительных задач.

В рабочей тетради уделено достаточно внимания свойству прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°. На его закрепление рекомендуются задания 193–196, которые приводятся в дополнительных задачах под номерами 5–7.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта (§ 4, п. 35), разобрать по тексту учебника задачу 43; дома — вопросы 14–17, задачи 41(1, 2), 42 и 44.

На втором уроке в классе: разобрать по тексту учебника задачу 48, решить задачу 47 из учебника и задачи 3, 4, 7 и 8 из дополнительных задач, провести самостоятельную работу в форме теста; дома — задачи 45, 46.

Дополнительные задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD. Докажите, что $\angle ACD = \angle CBD$.

2. В треугольнике ABC проведена высота BD. Определите углы треугольника ABC, если $\angle ABD = 33°$, а $\angle CBD = 36°$.

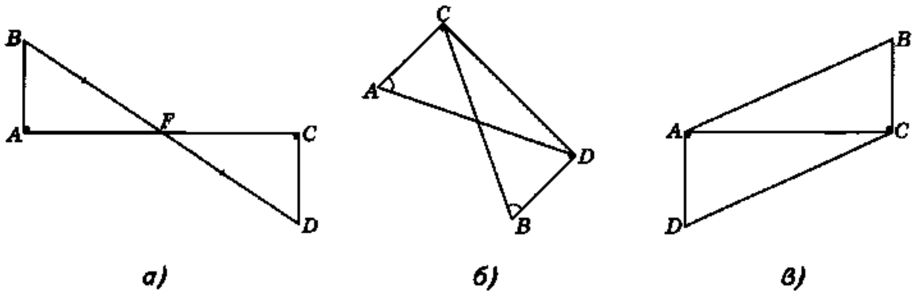


Рис. 139

3. Докажите равенство двух равнобедренных треугольников по углу при основании и высоте, проведенной к основанию.

4. Докажите равенство двух равнобедренных треугольников по боковой стороне и высоте, проведенной к основанию.

5. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 12 см, а угол при вершине — 120°. Определите высоту треугольника.

6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ прямой) проведена высота CD. Найдите длины отрезков AD и BD, если гипотенуза равна 12 см, а $\angle CAB = 30°$.

7*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ прямой) проведена высота CD. Докажите, что, если $\angle CBA = 30°$, то $AB : BD = 4 : 1$.

8*. Докажите, что в равностороннем треугольнике расстояние от точки пересечения двух биссектрис до стороны в два раза меньше расстояния от этой же точки до вершины.

9. Луч AB проходит между сторонами угла MAK. Докажите, что луч AB является биссектрисой угла MAK, если перпендикуляры BM и BK к сторонам угла равны.

10. Докажите равенство прямоугольных треугольников по данным рисунка 139.

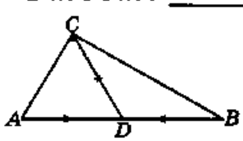
Самостоятельная работа по теме «Прямоугольный треугольник»

Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

1-й вариант

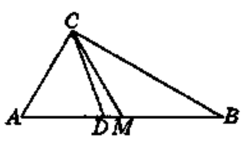
1. В прямоугольном равнобедренном треугольнике гипотенуза равна 12 см. Определите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу.

Ответ: ______________________



2. Из вершины C прямоугольного треугольника ABC ($\angle C$ прямой) проведена медиана CD, которая отсекает от него равнобедренный треугольник CDB ($BD = CD$). Найдите угол CBD, если угол ACD равен 64°.

1. 64°; 2. 26°; 3. 90°; 4. 154°.



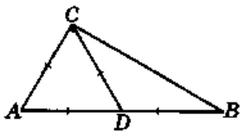
3. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведены медиана CM и биссектриса CD. Найдите угол DCM, если $\angle ABC = 35°$.

Ответ: ______________________

2-й вариант

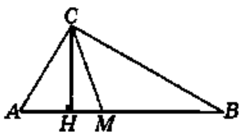
1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 12 см, а угол при вершине — 120°. Определите высоту треугольника.

Ответ: ______________________



2. Из вершины C треугольника ABC проведена медиана CD, которая отсекает от него равносторонний треугольник ACD. Найдите угол ABC.

1. 60°; 2. 90°; 3. 30°; 4. 150°.



3. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведены биссектриса CM и высота CH. Найдите угол HCM, если $\angle ABC = 28°$.

Ответ: ____________________

Существование и единственность перпендикуляра к прямой

Комментарий для учителя

Теорема о существовании и единственности перпендикуляра к прямой будет часто использоваться для обоснования единственности прямой или отрезка прямой, проведенных к данной прямой. После изучения данной темы значительно увеличивается объем задач на доказательство.

Текущие результаты изучения пункта 36. Учащиеся должны:

– формулировать и объяснять формулировку теоремы о перпендикуляре, опущенном из данной точки на данную прямую;

– доказывать теорему о перпендикуляре, опущенном из данной точки на данную прямую;

– решать задачи, применяя теорему о перпендикуляре, опущенном из данной точки на данную прямую;

– объяснять термины «расстояния от точки до прямой» и «расстояния между параллельными прямыми».

Методические рекомендации к изложению материала

1) Формулируя теорему *о перпендикуляре, опущенном из данной точки на данную прямую* («*Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один*»), следует обратить внимание учащихся на то, что в ней содержатся два утверждения: существование прямой («*из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр*») и ее единственность («*и только один*»). Иными словами теорема *о перпендикуляре, опущенном из данной точки на данную прямую* представляет собой фактически две теоремы. Поэтому доказательство каждой части теоремы целесообразно провести отдельно, как самостоятельную теорему. Целесообразность такого четкого разделения теоремы на две отдельные теоремы диктуется также и тем, что при доказательстве используются различные методы: первая часть доказывается конструктивно, а вторая часть — *методом от противного*. Перед доказательством второй части теоремы *о прямой, перпендикулярной данной* можно сообщить учащимся, что доказательство будет проводиться *методом доказательства от противного*, и четко выделить каждый шаг.

Полезно напомнить учащимся, что они уже встречались с доказательствами существования и единственности *прямой, перпендикулярной данной и проведенной через точку, лежащую на данной прямой*, и существования *прямой, параллельной данной и проходящей через точку, лежащую вне данной прямой* (рис. 140 и 141).

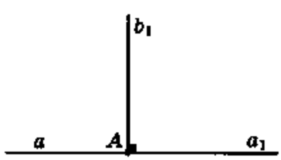


Рис. 140

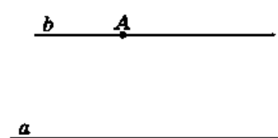


Рис. 141

Так как доказательство теоремы о *перпендикуляре, опущенном из данной точки на данную прямую*, достаточно трудно для восприятия учащихся, то лучше провести его полностью самому учителю. Включение учащихся во фронтальную работу при разборе теоремы может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от школьников ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

<u>1-я часть.</u> «*Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр*». В основе доказательства лежит идея построения, т.е. доказательство конструктивно. Значит, полезно проводить его одновременно с построением чертежа.

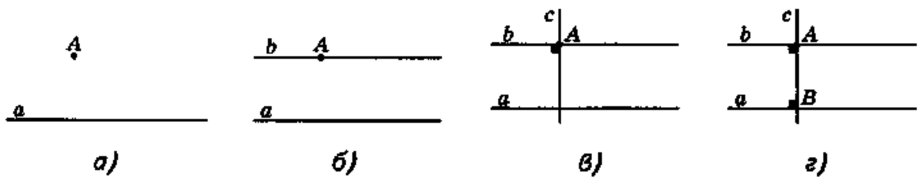


Рис. 142

<u>Доказательство.</u> Нам дана прямая a и точка A, не лежащая на ней (рис. 142, а).

1. Через точку A, не лежащую на данной прямой a, можно провести прямую b, параллельную прямой a (рис. 142, б).

2. Через точку A, лежащую на прямой b, можно провести прямую c, перпендикулярную прямой b (рис. 142, в).

3. Так как прямая c перпендикулярна прямой b, а прямая b параллельна прямой a, то прямая c перпендикулярна и прямой a.

4. Прямая c пересекает прямую a в некоторой точке B. Так как AB перпендикулярна прямой a и точка B лежит на прямой a, то AB является перпендикуляром к прямой a, опущенным из точки A (рис. 142, г).

<u>2-я часть.</u> «*Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно провести только один перпендикуляр к данной прямой*».

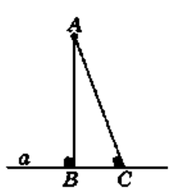


Рис. 143

<u>Доказательство.</u> Предположим, что из точки A можно опустить два перпендикуляра AB и AC (рис. 143). Но тогда в треугольнике ABC два прямых угла, что невозможно. Значит, предположение было неверным, т.е. из точки A можно провести только один перпендикуляр.

2) В результате решения задачи 50 доказывается очень важный факт: «расстояния от всех точек прямой до параллельной ей прямой есть *величина постоянная*».

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта (§ 4, п. 36), разобрать по тексту учебника задачу 50; дома — вопросы 18–20, задачи 48, 49 и 51.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что точка, лежащая на биссектрисе угла AOB, равноудалена от прямых AO и BO.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Сумма углов треугольника»

Комментарий для учителя

1) В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Признаки равенства треугольников» учащиеся должны:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие углы, внешний угол треугольника;
– выделять из данной конфигурации заданные в условии задания элементы фигур;
– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;
– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения внутренних односторонних и внутренних накрест лежащих углов, внешнего угла треугольника;
- признаки параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, признаки равенства прямоугольных треугольников, свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30°;
- теорему о сумме углов треугольника, теорему о внешнем угле треугольника.

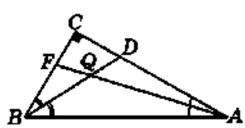
2) При подготовке к контрольной работе провести повторение по материалу параграфа в ходе решения задач: 2, 10, 18 (2), 19 (2), 20 (1); 22 (2), 31, 37, 38; решить задачи 35, 36, 39, 40 из учебника. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса. На дом можно предложить задачи 18 (3), 19 (4), 20 (1), 23 (3), 27 (2).

Можно предложить учащимся выполнить тесты 6, 7 и 8*, рекомендованный для § 4 «Сумма углов треугольника», и направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Поскольку каждый тест имеет четыре варианта, то можно просто использовать все 12 вариантов или создать из них один тест, используя часть заданий из каждого теста. Первый вариант более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задания 8 всех вариантов теста 8, при решении которого нужно воспользоваться свойством прямоугольного треугольника: *«медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе равна половине гипотенузы»*. Ее решение приведено во вступлении к тестам сборника «Геометрия. Тесты 7 класс», второй вариант решения дан в рабочей тетради.

3) В контрольной работе первые три задачи — это задачи со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4–5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

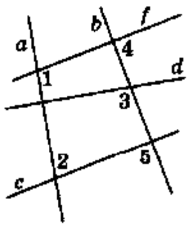
Контрольная работа по теме «Сумма углов треугольника»

1-й вариант



1. Найдите угол AQB между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника ABC.

Ответ: ______________________

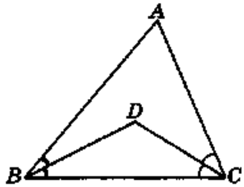


2. Дано: $\angle 1 = 108°$; $\angle 2 = 72°$; $\angle 5 = 83°$. Найдите $\angle 4$.

Ответ: ______________________

---

* Т.М. Мищенко. «Геометрия. Тесты. 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова М.: «Просвещение».



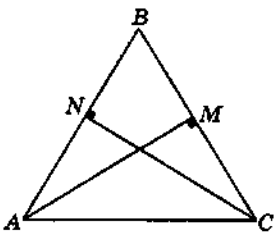
3. В треугольнике ABC угол BAC равен $64°$. Биссектрисы углов ABC и ACB пересекаются в точке D. Найдите угол CDB.

Ответ: ______________________

4. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке D. Найдите $\angle BDA$, если $\angle BCA = 28°$.

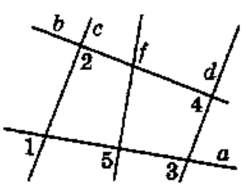
5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведена высота CD. Докажите, что, если $\angle CAB = 30°$, то $AB : BD = 4 : 1$.

2-й вариант



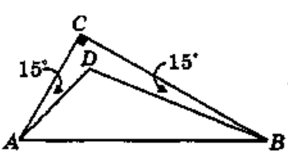
1. Определите величину угла между высотами AM и CN равностороннего треугольника ABC.

Ответ: ______________________



2. Дано: $\angle 2 = \angle 4 = 90°$; $\angle 1 = 83°$. Найдите $\angle 3$.

Ответ: ______________________



3. Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle C$ — прямой) отмечена точка D такая, что $\angle CAD = \angle CBD = 15°$. Найдите угол ADB.

Ответ: ______________________

4. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах B и A пересекаются в точке D. Найдите $\angle BCA$, если $\angle BDA = 70°$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC провели биссектрису AD угла при основании. Найдите углы треугольника ABC, если треугольники ABD и ADC равнобедренные.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Содержание параграфа составляет материал традиционный для любого курса планиметрии.

Содержание первого пункта «Окружность» вместе с рекомендованными к нему задачами позволяют описать взаимное расположением прямой и окружности, а также двух окружностей. Эти сведения в основном на наглядно-интуитивном уровне будут использоваться при решении задач на построение.

С понятием окружность и ее элементы: радиус, хорда, диаметр, касательная учащиеся уже встречались в курсе математики. Поэтому основное внимание учителю следует уделить определению окружности и, самое главное, равенству радиусов одной окружности.

Определение касательной, используемое в данном курсе, является нетрадиционным. Касательная к окружности в точке A определяется как прямая, перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A. Свойство же касательной и окружности иметь *единственную общую* точку доказывается (задача 8). С методической точки зрения такое определение касательной очень удобно при решении задач: наличие касательной в условии задачи позволяет сразу сделать вывод о существовании перпендикулярного ей радиуса.

В параграфе рассматриваются пять основных задач на построение: построение треугольника по трем сторонам; угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной данной; деление отрезка пополам. Задачи на построение направлены на развитие пространственных представлений и конструктивного подхода к решению геометрических задач.

Традиционно схема решения задачи на построение содержит анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим сущность каждого этапа этой схемы.

Анализ. Предполагается, что задача решена. Выполняется приблизительный рисунок, на котором изображается искомая и данные фигуры. При этом искомая и данные фигуры на рисунке должны находиться примерно в тех же отношениях, которые указаны в условии задачи. После этого пытаются выяснить, какие точки необходимо построить для нахождения искомой фигуры и какие из них являются известными (построенными) на основании условий задачи. Таким образом, решение задачи на построение искомой фигуры сводится к построению неизвестных точек, определяющих искомую фигуру. Другими словами, находятся такие зависимости между элементами искомой и данных фигур, которые позволят свести ее решение к другим, известным ранее или основным задачам на построение, и тем самым находятся способы построения этих точек. Целью анализа является составление плана решения.

Построение. Выполняется построение точек, необходимых для построения искомой фигуры, в полном соответствии с результатами анализа. По этим точкам строится искомая фигура.

Доказательство. Для того чтобы убедиться в правильности построения, доказывается (на основании известных теорем и аксиом), что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи, т.е. найденные в анализе необходимые условия являются и достаточными.

Исследование. Находятся условия существования решения, выясняется число решений задачи при каждом возможном выборе данных, а также условия, при которых задача имеет особые виды решений. Пусть, например, в задаче требовалось построить треугольник. В исследовании может быть поставлена задача отыскания дополнительных условий, которым должны удовлетворять данные, чтобы треугольник был, например, равнобедренным, равносторонним, прямоугольным и т.д.

В учебнике заложено требование обязательного проведения только двух средних этапов решения: «*Задача считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами*». Однако требования стандарта второго поколения требуют ознакомить учащихся со всеми этапами решения задач на построение. Для этого в учебнике есть целый ряд сравнительно несложных задач, при решении которых проведение анализа обеспечивает построение.

Планируемые итоговые результаты изучения пятого параграфа.

Учащиеся должны научиться:

– распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках окружность и ее элементы, касательные и секущие, окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника, взаимное расположение прямой и окружности, взаимное расположение двух окружностей;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– выделять в конфигурации, данной в условии задачи окружность и ее элементы, касательные и секущие, окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника, взаимное расположение прямой и окружности, взаимное расположение двух окружностей;

– иллюстрировать и объяснять формулировки определений касательных и секущих, вписанных и описанных окружностей, взаимное расположение прямой и окружности, взаимное расположение двух окружностей;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения окружности и ее элементов, касательных и секущих, окружностей, вписанных в треугольник и описанных около треугольника;
- теоремы об окружности, вписанной в треугольник и теоремы об окружности, описанной около треугольника;
- алгебраический аппарат, метод от противного;

– применять при решении задач на построение основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки.

Окружность. Окружность, описанная около треугольника. Касательная к окружности. Окружность, вписанная в треугольник

Комментарий для учителя

Определение касательной, используемое в данном курсе, является нетрадиционным. Касательная к окружности в точке A определяется как прямая, перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A. Свойство же касательной и окружности иметь *единственную общую* точку с окружностью доказывается (задача 8 к § 5). С методической точки зрения такое определение касательной очень удобно при решении задач: наличие касательной в условии задачи позволяет сразу сделать вывод о существовании перпендикулярного ей радиуса.

Текущие результаты изучения пунктов 38–41. Учащиеся должны:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках окружность и ее элементы, касательные и секущие, окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника, взаимное расположение прямой и окружности, взаимное расположение двух окружностей;

– формулировать и объяснять определения окружности, касательной и секущей, окружности, вписанной в треугольник и описанной около треугольника; теоремы об окружности, вписанной в треугольник и теоремы об окружности, описанной около треугольника;

– доказывать: теорему об окружности, вписанной в треугольник, и теорему об окружности, описанной около треугольника;

– решать задачи с использованием определений окружности, касательной и секущей, окружности, вписанной в треугольник и описанной около треугольника; теоремы об окружности, вписанной в треугольник и теоремы об окружности, описанной около треугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1) *Понятия* окружности, ее радиуса, диаметра, центра уже знакомы учащимся из курса математики. С целью повторения и закрепления введенных понятий можно предложить учащимся следующие устные задачи и вопросы по готовому рисунку (рис. 144):

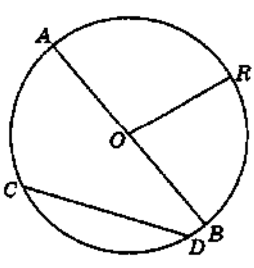


Рис. 144

1) Назовите центр окружности.

2) Назовите радиус окружности.

3) Назовите диаметр окружности.

4) Радиус окружности равен 7 см. Чему равен диаметр этой окружности?

5) Диаметр окружности равен 25 см. Чему равен ее радиус?

6) Назовите хорду окружности.

В определении окружности основное внимание следует уделить тому факту, что *все радиусы одной окружности равны*. Это свойство радиусов одной окружности будет активно применяться в дальнейшем, особенно активно для определения треугольник, как равнобедренного или равностороннего, и доказательства равенства треугольников в конфигурации с окружностью. Для отработки его применения можно предложить учащимся устные задачи 1 и 2 из дополнительных задач и предложить учащимся выполнить задания, используя для этого плакат такого типа, как на рисунке 145, сопровождая работу по нему вопросами:

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники, и запишите их номера в ответе.
2. Почему эти треугольники равны?

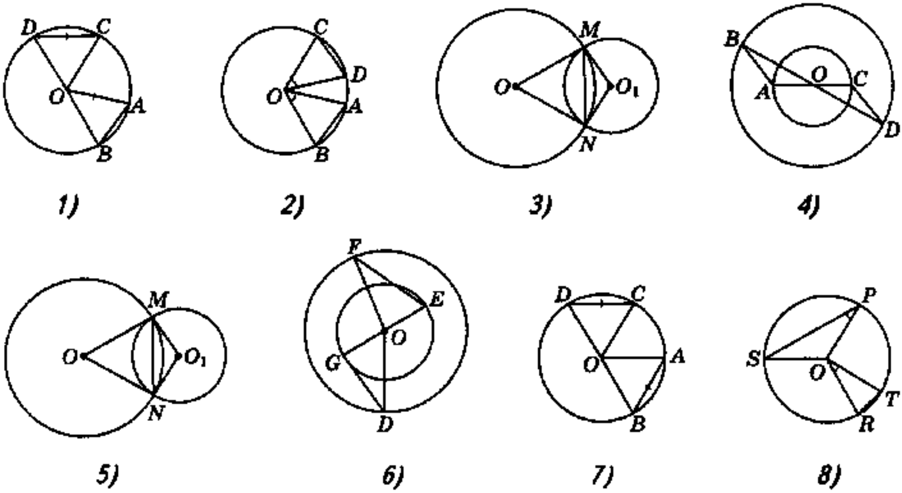


Рис. 145

Полезно при этом обсудить вопрос: почему треугольники на рисунке 7 равны, а на рисунке 1 нет. Аналогично для рисунков 2 и 8, 3 и 5, 4 и 6.

При наличии времени и чтобы подчеркнуть принципиальное отличие окружности от прямой полезно предложить учащимся устно выполнить задачи 8 и 9 из дополнительных задач. Кроме того, эти задачи послужат эмоциональной разгрузкой урока.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради записать формулировку определения окружности, на

прямое закрепление устно выполнить задания 199 и 200, которые полностью совпадают с заданиями 1 и 2 из дополнительных задач, затем устно выполнить задание 201, которое является полным аналогом работы с плакатом, используя свойство окружности, а именно, все радиусы одной окружности равны. *Кроме этого, учащиеся смогут устно выполнить задачи 202 и 203. Таким образом, на закрепление определения окружности будет решено больше задач и при этом на их решение будет затрачено значительно меньше времени. Кроме того, у учащихся останутся чертежи и условия тех задач, которые решались устно.*

В задаче 3 (§ 5, п. 38), решение которой приведено в тексте учебника, рассматривается очень важное свойство диаметра окружности: «*Диаметр окружности, проведенный через середину хорды, перпендикулярен ей*», которое в дальнейшем будут неоднократно применяться при обосновании решения задач.

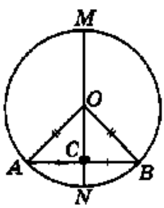


Рис. 146

Дано: AB — хорда, MN — диаметр, $AC=CB$

Доказать: $MN \perp AB$ (рис. 146).

Доказательство.

1) $AO = BO$ как радиусы одной окружности, значит, ΔABO — равнобедренный.

2) Так как по условию $AC = CB$, значит, OC — медиана, отсюда по свойству медианы равнобедренного треугольника OC — высота, т.е. $OC \perp AB$.

В задаче 14 (1) рассматривается еще одно свойство: «*Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров*». Это свойство также будет использоваться при решении задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради разобрать решение задачи 207, заполнив пропуски.

2) При введении определения *окружности, описанной около треугольника*, полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что точка O — центр *описанной около треугольника окружности* — равноудален от вершин этого треугольника, т.е. $OA = OB = OC = R$.

3) При доказательстве *теоремы о положении центра описанной окружности* можно воспользоваться доказательством задачи 3 (§ 5, п. 38). Фактически в задаче 3 (§ 5, п. 38) уже доказано, что центр описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к *одной* из сторон. Далее полезно провести доказательство того, что *три серединных перпендикуляра*, проведенные к сторонам произвольного треугольника, пересекаются в *одной* точке. Этот факт является следствием решения задачи 6 (§ 5, п. 39). Решение задачи приведено в тексте учебника.

В рабочей тетради следует записать формулировки определений описанной окружности и серединного перпендикуляра и решить задачу 208.

4) После того как введено *определение касательной*: «*Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, называется касательной*», можно предложить учащимся задачу 9 (§ 5, п. 40) и задачи 10 и 11 из дополнительных задач.

Взаимное *расположение прямой* и *окружности* и *взаимное расположение двух окружностей* рекомендуется рассмотреть вместе на третьем уроке в классе. Здесь же рассмотреть решение задачи 8 (2).

Замечание. В учебнике приведено решение задачи 8 (2).

В рабочей тетради на прямое закрепление определения касательной выполнить задания 209–212, из которых задания 209 и 211 полностью совпадают задачами 9 и 10 из дополнительных задач. Поскольку на их решение будет затрачено значительно меньше времени, то полезно решить и задачи 213, 214 и 215. Из решения задачи 210 непосредственно следует, что две касательные, проведенные из одной точки к одной окружности, равны. Использование этого факта при решении задачи 213 превращает ее в прямое следствие задачи 210.

5) Аналогично *теореме о положении центра описанной окружности* в учебнике доказывается, что *центр вписанной окружности* лежит на биссектрисе угла A. После проведения доказательств для углов B и C целесообразно заметить учащимся, что все три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри этого треугольника.

> ***В рабочей тетради следует записать формулировки определения вписанной окружности. Затем на применение теорем о положении центров вписанной и описанной окружностей полезно выполнить задачи 215 и 216, в которых доказываются свойства вписанных и описанных равнобедренных и равносторонних треугольников.***

6) В тексте учебника вводятся определения внешнего и внутреннего касания двух окружностей. При этом теоретический и задачный материал учебника позволяют систематизировать знания учащихся о взаимном расположении прямой и окружности и двух окружностей. Для этого полезно использовать плакаты такого типа, как на рисунках 147 и 148.

Перед рассмотрением взаимного расположения прямой и окружности и двух окружностей следует рассмотреть решение задач 2, 13 (1, 2), 14 (2). При обсуждении взаимного расположения двух окружностей следует заметить, что одна из окружностей может лежать внутри другой и поэтому в двух позициях — две окружности не имеют общих точек и внутреннее и внешнее касание — рассматриваются два случая.

Взаимное расположение прямой и окружности.

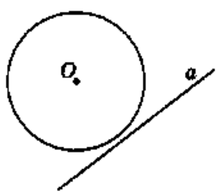
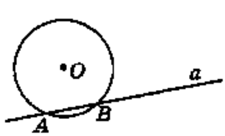
<table>
<tr><td>
</td><td>Прямая и окружность не имеют общих точек</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Прямая и окружность имеют только одну общую точку — точку касания (задача 8 (1) из § 5, п. 40)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Через две произвольные точки окружности по аксиоме принадлежности точек и прямых на плоскости можно провести единственную прямую. Значит, прямая и окружность могут иметь две общие точки. В силу решения задачи 13 (2) (§ 5, п. 40) прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек</td></tr>
</table>

Рис. 147

Взаимное расположение двух окружностей.

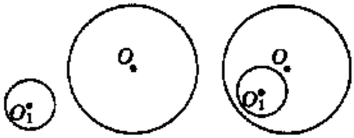
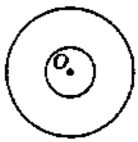
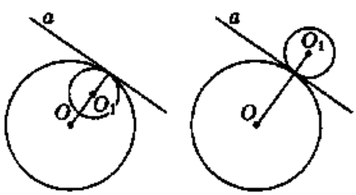
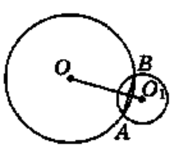
 *а)* *б)*	Две окружности не имеют общих точек
	Концентрические окружности — две окружности разных радиусов с общим центром
 *а)* *б)*	Если две окружности имеют одну общую точку и общую касательную в этой точке, то они касаются. Если центры окружностей лежат по одну сторону от общей касательной, то касание <u>внутреннее</u> (рис. а). Если центры окружностей лежат по разные стороны от общей касательной, то касание <u>внешнее</u> (рис. б)
	Две окружности имеют две общие точки и общую хорду. В силу решения задачи 14 (2) (§ 5, п. 40) две окружности не могут иметь более двух общих точек

Рис. 148

> ***В рабочей тетради приведены обе таблицы. Перед рассмотрением взаимного расположения двух окружностей следует посмотреть записи решений задач 13 (2), 14 (1, 2), формулировки которых даны под номерами 217 и 218.***

5) В содержание пункта **41** «Окружность, вписанная в треугольник», включен дополнительный материал: определение вневписанной окружности треугольника, проиллюстрированное соответствующим рисунком, и дано объяснение, как можно построить эту окружность.

Если учитель сочтет нужным обсудить эту тему, то можно предложить следующий сценарий.

Ввести определение вневписанной окружности и обсудить вопрос:

> Сколько вневписанных окружностей может быть у треугольника?

Существование и единственность вневписанной окружности обусловлены тем, что биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса внутреннего угла, не смежного с этими двумя, пересекаются в одной точке, которая и является центром такой окружности.

После этого можно решить задачу.

> Пусть K — точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AC треугольника ABC. Докажите, что отрезок AK равен полупериметру треугольника ABC.

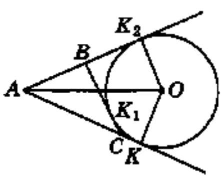


Рис. 149

Решение. Точки K_2 и K_1 — точки касания вневписанной окружности с прямыми AB и BC соответственно (рис. 149). Тогда $CK = CK_1$, $BK_1 = BK_2$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки к одной окружности. Отрезки AK и AK_2 равны, как соответственные катеты равных прямоугольных треугольников AOK и AOK_2. Периметр треугольника ABC равен $2p = AC + CB + AB = AC + CK_1 + BK_1 + AB = AC + CK + AB + BK_2 = AK + AK_2$. А так как $AK = AK_2$, то $p = AK$.

> *В рабочей тетради дан материал для работы по теме «Вневписанная окружность треугольника». Как всегда следует записать формулировку определения вневписанной окружности. Затем на применение решить задачи 220–222. Этот материал можно предложить сильным ученикам для самостоятельной работы. Прочитать определение вневписанной окружности треугольника по учебнику и поработать с рабочей тетрадью.*

6) Предлагаемое ниже планирование предполагает, что по теме «Окружность» будет проведена проверка ее усвоения учащимися. Проверку можно провести в форме самостоятельной работы, приведенной ниже и рассчитанной на 15 минут. Задания самостоятельной работы — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Но можно для проверки усвоения темы «Окружность» использовать тест 9 из сборника тестов «Геометрия. Тесты. 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова кроме последнего девятого задания.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе: изложить весь теоретический материал пунктов (§ 5, п.п. 38, 39); разобрать по тексту учебника решение задач 3 и 6, устно решить задачи 1 и 14 (1), из учебника и задачи 1–4 из дополнительных задач; дома— вопросы 1–4, задачи 4, 5.

На втором уроке в классе: изложить весь теоретический материал пунктов (§ 5, п.п. 40, 41), кроме *взаимного расположения двух окружностей* и решения задачи 8 (2); решить задачи 8 (1), 9 из учебника и задачи 9 и 10 из дополнительных задач; дома — вопросы 5, 8, 9, задачи 10, 16 (1, 2), 17.

На третьем уроке в классе: провести самостоятельную работу, провести обобщение в ходе *рассмотрения взаимного расположение пряной и окружности* и *двух окружностей*, разобрать по тексту учебника решение задачи 8, решить задачи. 2, 13 (1, 2), 14 (1, 2); дома— вопросы 6, 7, задачи 11, 12, 15 (1, 2, 3).

Указания к задачам

Следует отметить, что большая часть задач тесно связана между собой, и результат, полученный в одной из них, затем используется в решении другой. Учителю следует учитывать это при планировании, чтобы искусственно не завысить уровень сложности задачи.

Утверждение задачи 3, решение которой приведено в методических рекомендациях, используется при решении задач 4, 8(2), 13(2), 14(2).

13. 1) Пусть ΔBOC равнобедренный с основанием BC (рис. 150). Предположим, что ΔAOB также равнобедренный с основанием AB. Проведем в этом треугольнике медиану OM. Она является одновременно высотой, т.е. $OM \perp AB$. Проведя медиану OK в треугольнике BOC, получим $OK \perp BC$. Таким образом, из точки O на прямую a опущены два перпендикуляра, что невозможно; следовательно, треугольники AOB и BOC не могут быть равнобедренными одновременно.

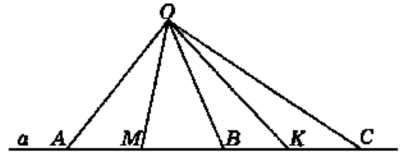


Рис. 150

2) 1-й способ. Предположим, что окружность с центром O и прямая a пересекаются в трех точках: A, B и С. Тогда $AO = OB = OC$ как радиусы одной окружности, а треугольники AOB и BOC равнобедренные. Но в задаче 13 (1) доказано, что это невозможно. Значит, окружность и прямая не могут пересекаться более чем в двух точках.

2-й способ. Задача 13 (2) может быть решена без ссылки на задачу 13 (1). Предположим, что у окружности и прямой три общие точки: A, B и C. Проведем через середины хорд AB и BC диаметры. Они перпендикулярны хордам (задача 3), а значит, перпендикулярны отрезку AC. Но из точки O к отрезку AC можно провести только один перпендикуляр. Значит, наше предположение неверно — окружность и прямая не могут пересекаться более чем в двух точках.

14. 1) ΔAOB и ΔAO_1B — равнобедренные с общим основанием AB, так как $OA = OB$ и $O_1A = O_1B$, как радиусы одной окружности, Из вершин O и O_1 треугольников AOB и AO_1B опустим перпендикуляры на общее основание AB. Так как основание каждого перпендикуляра делит отрезок AB пополам, то каждый из них проходит через точку C. Следовательно, по теореме о единственности перпендикуляра, проведенного к данной прямой, OC и O_1C лежат на одной прямой OO_1, и значит, $AB \perp OO_1$, что и требовалось доказать (рис. 151).

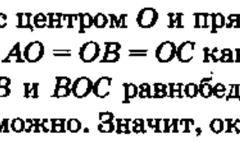


Рис. 151

2) 1-й способ. Предположим, что две окружности с центрами O и O_1 пересекаются в трех точках: A, B и C. Тогда в силу решения задачи 14 (1), $AB \perp OO_1$, и $AC \perp OO_1$,. Но к прямой OO_1 можно провести лишь одну перпендикулярную прямую, проходящую через точку A. Значит, точки A, B и C принадлежат одной прямой. Но в силу решения задачи 13 прямая и окружность не могут пересекаться в трех точках. Значит, наше предположение неверно — две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

2-й способ. Предположим, что окружности с центрами O и O_1 пересекаются в трех точках: A, B и C. Пусть точка C — середина общей хорды AB. OC и O_1C перпендикулярны AB (задача 3); значит, O и O_1 лежат на одной прямой и $OO_1 \perp AB$. Аналогично, если возьмем точки A и C, то получим, что можно доказать, что $OO_1 \perp AC$. Из точки A на прямую OO_1 можно опустить только один перпендикуляр; значит, точки A, B и C лежат на одной прямой. Но в силу решения задачи 13 прямая и окружность не могут пересекаться в трех точках. Значит, наше предположение неверно — окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

15. 1) Прямоугольные треугольники AOB и COB (рис. 152) равны по двум катетам ($AB = BC$ по условию, OB — общий). Из равенства треугольников следует $OC = OA = R$. Значит, точка C лежит на окружности. 2) Пусть прямая a и окружность имеют единственную общую точку A. Проведем радиус OA в эту точку (рис. 153).

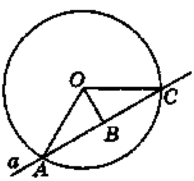


Рис. 152

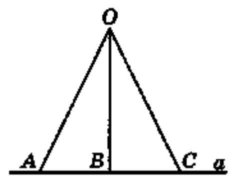


Рис. 153

Предположим, что A не является точкой касания, тогда радиус OA не перпендикулярен прямой a. Проведем $OB \perp a$ и отложим $BC = AB$. Тогда в силу решения задачи 15 (1) точка C тоже принадлежит окружности, что противоречит условию. Значит, a — касательная к окружности в точке A.

3) Пусть A — единственная общая точка двух окружностей с центрами в точках O и O_1. Докажем сначала, что точка A лежит на линии центров OO_1. Предположим противное: пусть $A \notin OO_1$ (рис. 154). Проведем $AD \perp OO_1$ и отложим $DB = AD$, треугольники OAD и OBD и треугольники O_1AD и O_1BD равны по двум катетам. Отсюда следует: $OA = OB = R$, $O_1A = O_1B = R_1$.

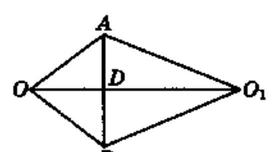


Рис. 154

Значит, точка B еще одна общая точка двух окружностей, что противоречит условию задачи. Проведем через точку A прямую a, перпендикулярную отрезку OO_1. Эта прямая по определению является касательной к обеим окружностям, т.е. окружности касаются.

Дополнительные задачи

1. Дана окружность с центром в точке O. По данным рисунка 170 определите вид треугольника BOA.

2. Дана окружность с центром в точке O. Хорда AB равна радиусу. Определите вид треугольника BOA (рис. 155).

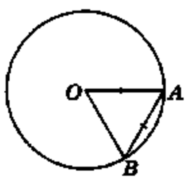


Рис. 155

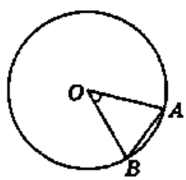


Рис. 156

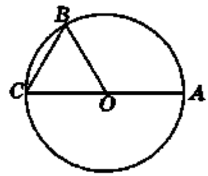


Рис. 157

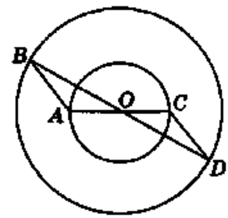


Рис. 158

3. Радиус окружности с центром в точке O равен 7 см, $\angle BAO = 60°$. Найдите хорду AB. (рис. 156).

4. В окружности с центром в точке O проведен диаметр AC. Определите углы ΔBOC, если $\angle AOB = 118°$ (рис. 157).

5. Отрезки AB и CD являются диаметрами окружности с центром в точке O. Докажите, что хорды AC и BD равны и параллельны.

6. Две окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $\Delta OAO_1 = \Delta OBO_1$.

7. Даны две окружности с общим центром в точке O, отрезки AC и BD — диаметры этих окружностей. Докажите, что $\Delta ABO = \Delta CDO$ (рис. 158).

8. Имеет ли смысл понятие «*между*» для трех точек, расположенных на окружности.

9. Три черепахи: Тестудо, Тротила и Каррета ползут по дороге. «Я ползу первой», — гордо говорит Тестудо. «Хорошо, что я — не последняя», — скромно заявляет Тротила. «Ура, я обогнала Тестудо», — утверждает Каррета. Как это можно объяснить?

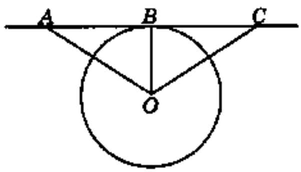


Рис. 159

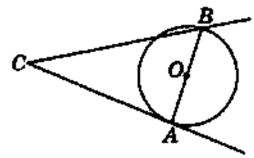


Рис. 160

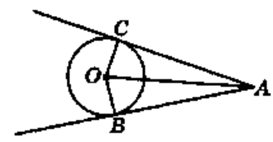


Рис. 161

10. К окружности с центром в точке O проведена касательная AC (B — точка касания), $AB = CB$. Докажите равенство ΔAOB и ΔCOB (рис. 159).

11. Из точки C к окружности с центром в точке O проведены касательная CA (A — точка касания) и секущая CB, AB — диаметр, $\angle ACB = 39°$. Определите другие углы ΔCAB (рис. 160).

12. Пересекутся ли две касательные к окружности, проведенные через концы одного диаметра?

13. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены две касательные AC и AB (B и C — точки касания). Докажите: а) AO — биссектриса угла CAB; б) прямая AO перпендикулярна отрезку CB и делит его пополам (рис. 161).

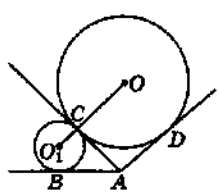


Рис. 162

14. Из одной точки к двум касающимся внешним образом окружностям проведены три касательные, причем одна из них проходит через точку касания окружностей. Докажите, что касательные равны (рис. 162).

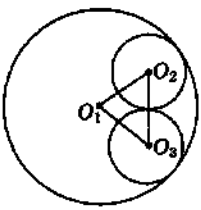
15. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Докажите, что прямая BC касается окружности с центром в точке A, проходящей через точку C.

Самостоятельная работа

1-й вариант

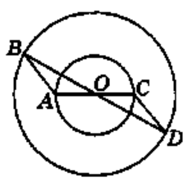
1. Из одной точки окружности проведены хорда, равная радиусу данной окружности, и диаметр. Найдите угол между ними. Сделайте рисунок и запишите ответ.

Ответ: ____________________



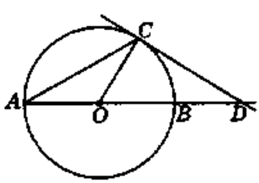
2. Три окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3 касаются друг друга, как показано на рисунке. Радиусы окружностей равны 12 см, 5 см и 5 см. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

Ответ: ____________________



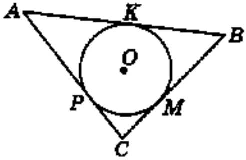
3. Две окружности имеют общий центр в точке O. Диаметр большей окружности равен 14 см, а диаметр меньшей 8 см, отрезок CD равен 5 см. Найдите сторону AB треугольника OBA.

1. 7 см; 2. 4 см; 3. 2, 5 см; 4. 5 см.



4. Угол между диаметром AB и хордой AC окружности равен 40°. Через точку C проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую AB в точке D. Определите вид треугольника ACD.

1. Треугольник ACD равнобедренный;
2. Треугольник ACD равносторонний;
3. Треугольник ACD разносторонний.



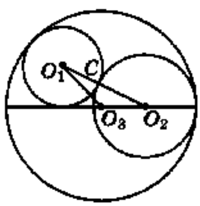
5. В треугольник ABC вписана окружность. Точки K, M и P — точки ее касания со сторонами AB, BC и AC соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AK + BM + CP = 12$ см.

Ответ: ________________________.

2-й вариант

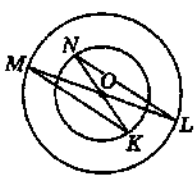
1. Из одной точки окружности проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу данной окружности. Найдите угол между ними. Сделайте рисунок и запишите ответ.

Ответ: ________________________



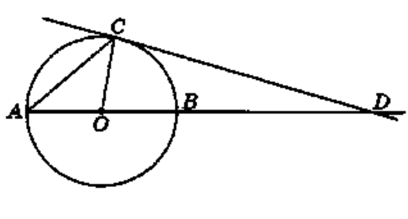
2. Три окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3 касаются друг друга, как показано на рисунке. Радиусы окружностей равны 12 см, 7 см и 5 см. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

Ответ: ________________________



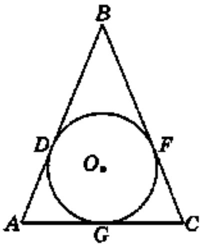
3. Две окружности имеют общий центр в точке O. Диаметр большей окружности равен 14 см, а диаметр меньшей — 12 см, отрезок MK равен 9 см. Найдите сторону NL треугольника ONL.

1. 7 см; 2. 12 см; 3. 9 см; 4. 4,5 см.



4. Угол между диаметром AB и хордой AC окружности равен 45°. Через точку C проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую AB в точке D. Определите вид треугольника ACD.

1. Треугольник ACD равнобедренный;
2. Треугольник ACD равносторонний;
3. Треугольник ACD разносторонний.



5. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность, которая касается основания AC в точке G, а боковых сторон AB и BC — в точках D и F соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $FB = 4$ см, $AG = 2$ см.

Ответ: ____________________

Задачи на построение

Комментарий для учителя

При изучении задач на построение с помощью циркуля и линейки будут рассматриваться построения отрезков, лучей, прямых, окружностей и их дуг, углов и треугольников. Каждая из этих фигур однозначно может быть определена заданием конечного числа определяющих ее точек:

отрезок — его концами;

луч — начальной точкой и одной из его произвольных точек;

прямая — двумя ее произвольными точками;

окружность — центром и концами ее радиуса или центром и какой-нибудь ее точкой;

дуга окружности — ее концами и радиусом;

угол — вершиной и парой произвольных точек на его сторонах;

треугольник — его вершинами.

Так как определяющие точки каждой фигуры задают ее однозначно, то решение любой задачи на построение сводится к построению определяющих точек искомой фигуры.

При решении задач на построение с помощью циркуля и линейки определяющие точки искомой фигуры могут быть получены как точки пересечения двух прямых, двух окружностей или прямой и окружности. Поэтому отыскание условий существования решения задачи сводится, как правило, к отысканию условий пересечения двух прямых, двух окружностей, прямой и окружности, пересечением которых являются искомые определяющие точки фигуры. А при определении числа решений задачи в общем случае следует исходить из того, что две прямые пересекаются в одной точке; две окружности — в двух точках; прямая и окружность — в двух точках.

Когда говорят о задачах на построение, то если не оговорено специально, то, значит, построение выполняется с помощью циркуля и линейки. С помощью линейки проводят прямую линию через две точки. Математическая линейка односторонняя и не имеет делений, поэтому, если отрезок задан линейным размером, необходимо его изобразить с помощью обычной линейки. Затем, при откладывании отрезка его длину фиксировать с помощью циркуля. С помощью циркуля строят окружность с заданным центром и радиусом, при этом радиус может задаваться отрезком или двумя точками, расстояние между которыми равно длине радиуса. Если угол задан градусной мерой, то его следует построить с помощью транспортира, а при построении искомой фигуры использовать алгоритм построения угла, равного данному.

Поскольку стандарт определяет, что *«задача на построение считается решенной, если указан способ построения фигуры»*, то присутствие в учебнике задач на построение, в которых стороны треугольников заданы линейными размерами, а углы — градусной мерой (задачи 19, 23 и 24), полностью ему соответствует.

Текущие результаты изучения пунктов 42–47. Учащиеся должны:

– знать традиционную схему решения задач на построение с помощью циркуля и линейки: анализ, построение, доказательство и исследование;

– применять при решении задачи на построение алгоритмы: построение треугольника по трем сторонам; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла; деление отрезка пополам; построения перпендикулярной прямой.

Методические рекомендации к изучению материала

1) С задачами на построение учащиеся встречаются здесь впервые. В 5–6 классах они строили развертки квадрата и прямоугольного параллелепипеда и окружности заданного радиуса. Кроме того, они делали чертежи и рисунки к задачам, поэтому пользоваться линейкой и циркулем они умеют. При решении задач на построение, как и в обычных задачах, следует записать (нарисовать) условие, если это возможно.

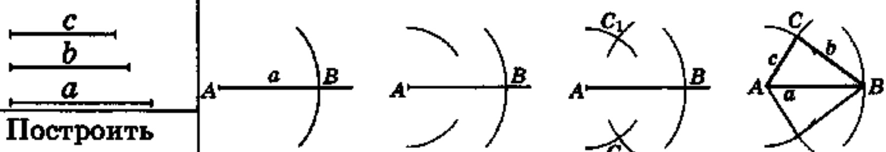
2) Построение с помощью циркуля и линейки треугольника по трем сторонам.

Построение (рис. 163). Пусть a — бóльшая из трех сторон. Возьмем произвольный луч с началом A и проведем окружность радиуса a с центром в точке A и точку пересечения луча и окружности обозначим B. Проведем еще одну окружность радиуса c с центром в точке A и окружность радиуса b с центром в точке B.

Исследование. Если $a < b + c$, то эти две окружности пересекаются в двух точках C_1 и C_2. Тогда по построению треугольники ABC_1 и ABC_2 имеют стороны заданных длин a, b, c. Если $a \geq b + c$, то эти две окружности не пересекаются, и задача решения не имеет.

Дано:

Построение



Построить треугольник

1) 2) 3) 4)

Рис. 163

После этого можно предложить учащимся решить задачу:

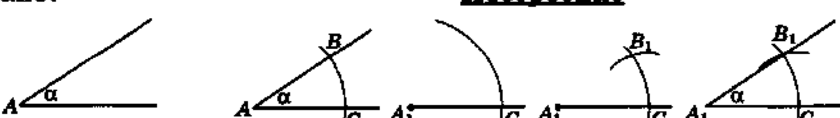
Постройте равносторонний треугольник по его стороне.

В рабочей тетради следует предложить учащимся оформить алгоритм построения с помощью циркуля и линейки треугольника по трем сторонам. На закрепление алгоритма решить задачи 223–225.

3) Построение с помощью циркуля и линейки угла, равного данному.

Дано:

Построение



Построить угол, равный $\angle\alpha$

1) 2) 3) 4)

Рис. 164

<u>Построение</u> (рис. 164). Построим окружность произвольного радиуса с центром в вершине данного угла A. Пусть B и C — точки пересечения этой окружности со сторонами угла.

Проведем окружность, радиус которой равен AC, с центром в точке A_1 — начальной точке луча l и точку пересечения луча и окружности обозначим C_1. Радиусом BC проведем окружность с центром в точке C_1 и точку пересечения двух окружностей обозначим B_1.

Проведем луч A_1B_1 , получили $\angle B_1A_1C_1$, равный данному. Равенство углов следует из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

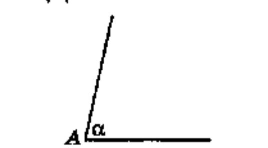
После этого можно предложить учащимся решить задачу:

> Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу, прилежащему к основанию.

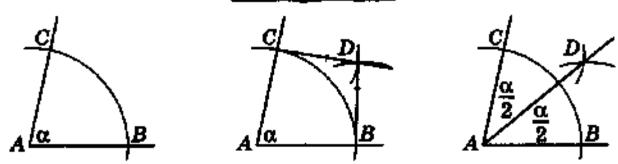
> ***В рабочей тетради следует предложить учащимся оформить алгоритм построения с помощью циркуля и линейки угла, равного данному. На закрепление алгоритма решить задачи 226–229.***

4) Построение с помощью циркуля и линейки биссектрисы угла.

Дано: <u>Построение</u>



Построить биссектрису $\angle$A



1) *2)* *3)*

Рис. 165

<u>Построение</u> (рис. 165). Построим окружность произвольного радиуса с центром в вершине данного угла A. Пусть B и C — точки пересечения этой окружности со сторонами угла. Из точек B и C тем же радиусом проведем окружности и точку пересечения этих двух окружностей обозначим D. Проведем луч AD. Луч AD является биссектрисой $\angle A$, что следует из равенства треугольников CAD и BAD по третьему признаку равенства треугольников. Из их равенства следует, что $\angle CAD = \angle BAD$.

После этого можно предложить учащимся решить задачу 28 из учебника.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся оформить алгоритм построения с помощью циркуля и линейки биссектрисы угла. На закрепление алгоритма решить задачу 230, которая в учебнике дается под номером 28.*

5) Деление отрезка пополам с помощью циркуля и линейки.

Дано: Отрезок AB

Построить точку O так, чтобы $AO = OB$

Построение

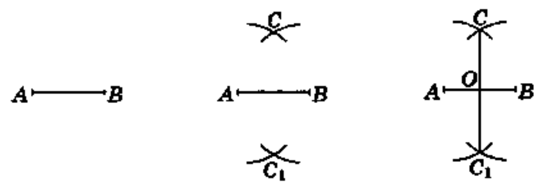


Рис. 166

Построение (рис. 166). Из точек B и A радиусом AB проведем окружности и точки пересечения этих двух окружностей обозначим C_1 и C. Проведем прямую C_1C. Точку пересечения прямой C_1C и отрезка AB обозначим O.

Докажем, что точка O является серединой отрезка AB. Треугольники C_1AC и C_1BC равны по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle ACO = \angle BCO$. Тогда треугольники ACO и BCO равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда стороны AO и BO равны. Следовательно, O является серединой отрезка AB.

После этого можно предложить учащимся решить задачу 29 из учебника.

> *.В рабочей тетради следует предложить учащимся оформить алгоритм деления отрезка пополам с помощью циркуля и линейки. На закрепление алгоритма решить задачу 231, которая в учебнике дается под номером 29.*

6) Построение с помощью циркуля и линейки прямой, перпендикулярной данной.

Рассмотрим два случая.

1. прямая, перпендикулярная данной, проходит через точку, лежащую на данной прямой.

Дано: $C \in n$

Построить прямую, перпендикулярную прямой n.

I. Построение

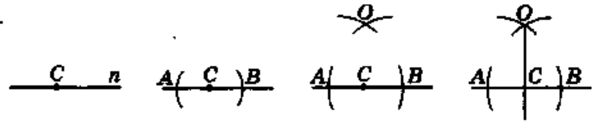


Рис. 167

<u>Построение</u> (рис. 167). Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке C. Пусть B и A — точки пересечения этой окружности с прямой n. Из точек B и A радиусом AB проведем окружности и точку пересечения этих двух окружностей обозначим O. Проведем прямую CO. Перпендикулярность прямых CO и n следует из равенства треугольников AOC и BOC по трем сторонам и теоремы о медиане равностороннего треугольника.

2. прямая, перпендикулярная данной, проходит через точку, не лежащую на данной прямой.

Дано:
$C \notin n$

Построить прямую, перпендикулярную прямой n.

<u>II. Построение</u>

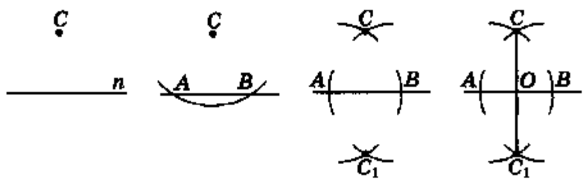


Рис. 168

<u>Построение</u> (рис. 168). Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке C. Пусть B и A — точки пересечения этой окружности с прямой n. Из точек B и A тем же радиусом проведем окружности и точки пересечения этих двух окружностей обозначим C_1 и C. Проведем прямую C_1C.

Докажем перпендикулярность прямых C_1C и n. Точку пересечения прямых C_1C и n обозначим O. Треугольники ACB и AC_1B равны по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle CAO = \angle C_1AO$. Тогда треугольники CAO и C_1AO равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что углы COA и C_1OA равны. А так как они смежные, то они прямые. Следовательно, CO — перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую n.

После разбора задачи 5.5 можно предложить учащимся решить задачи 33 и 35, из учебника.

Решение задачи 35 является составной частью решения задач 36, 37.

В рабочей тетради следует предложить учащимся оформить алгоритм построения с помощью циркуля и линейки прямой, перпендикулярной данной. На закрепление алгоритма решить задачи 232 и 233.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе провести краткую беседу о том, что такое задачи на построение, разобрать решение задачи 5.1, решить задачи 20 (1), 21; дома — вопрос 10, задача 20 (2, 3), 22.

На втором уроке в классе при проверке домашнего задания рассмотреть решение задачи 22, разобрать решение задачи 5.2, решить задачи 23 (1 а; 2 б) и 24 (2); дома — вопрос 11, задачи 23 (1 б; 2 а) и 24 (1).

На третьем уроке в классе разобрать решения задач 5.3 и 5.4, решить задачи 28, 29, 31; дома — вопросы 12, 13, задачи 26, 27 (устно), 30, 32.

На четвертом уроке в классе разобрать решение задачи 5.5, решить задачи 33, 35, 39; дома — вопрос 14, задачи 34, 36, 37.

Указания к задачам

На примере задачи 21 можно дать учащимся представление об этапе *исследования*, о различном числе решений задач на построение.

Дано:
R
Точки A и B.

Построить окружность

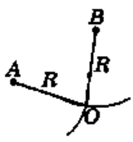


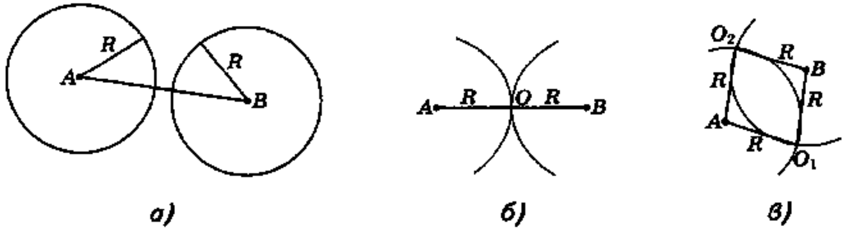
Рис. 169

Решение. Проведем две окружности радиуса R с центрами в точках A и B (рис. 169). Точки пересечения этих окружностей являются центрами искомой окружности.

Исследование. Если $AB > 2R$, то задача не имеет решения (рис. 170, а).

Если $AB = 2R$, то задача имеет одно решение: центр окружности — середина отрезка AB (рис. 170, б).

Если $AB < 2R$, то задача имеет два решения: обе точки пересечения проведенных окружностей служат центрами искомых окружностей (рис. 170, в).

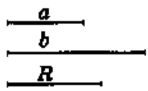


а) б) в)

Рис. 170

Задачу 22 рекомендуется решить в классе. Если она будет задана на дом, то надо дать указание: решение начать с построения окружности.

Дано:



Построить треугольник

Рис. 171

Условие задачи может быть оформлено, как на рисунке 171.

Решение (рис. 172). Проведем окружность данного радиуса. Выберем на окружности точку C и из этой точки как из центра сделаем две засечки радиусами a и b. Получим точки A и B. ΔABC искомый. У него данные стороны $BC = a$, $AC = b$, радиус описанной окружности равен R.

Построение

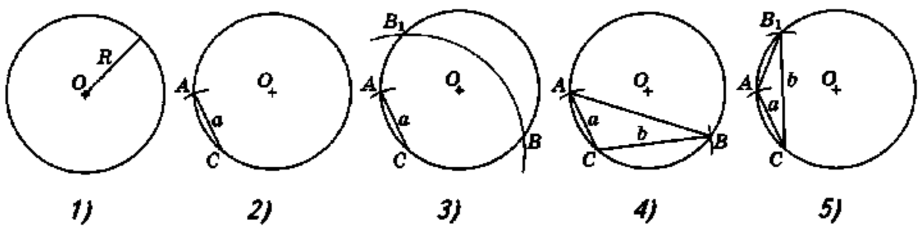


Рис. 172

Исследование. Если $a < 2R$ или $b < 2R$ задача имеет два решения (рис. 173, а).

Если $a = 2R$ или $b = 2R$ задача имеет одно решение (рис. 173, б).

Если $a > 2R$ или b $> 2R$ задача не имеет решений (рис. 173, в).

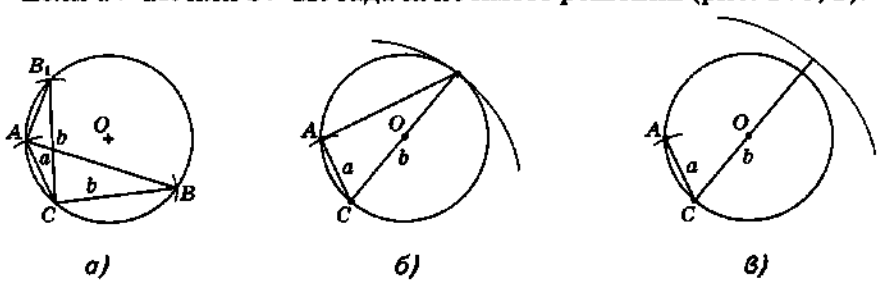
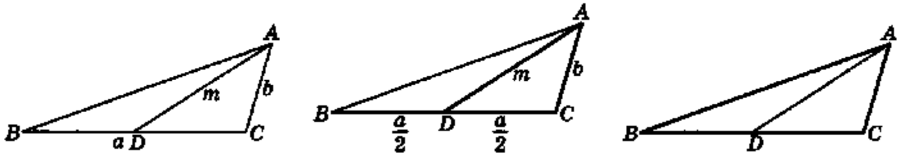


Рис. 173

Задачу 30 рекомендуется решить дома, поэтому при проверке домашнего задания можно показать учащимся, как проводится первый этап решения задач на построение, а именно анализ.

Анализ. Предположим, что задача решена. Выполним от руки рисунок (рис.174, а). Пусть ΔABC — искомый, причем известно, что $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$ — медиана, т.е. $CD = DB = \frac{a}{2}$. Из рисунка видно, что у треугольника ACD известны все три стороны (рис. 174, б).



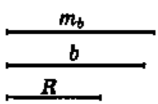
а) б) в)

Рис. 174

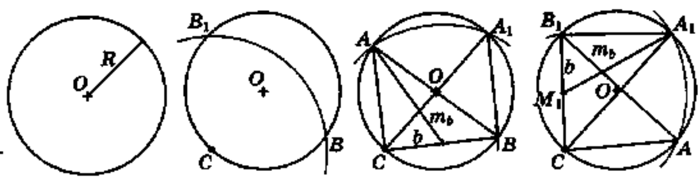
Поэтому <u>построение</u> нужно начать с построения ΔACD, при этом получим две вершины A и C, а затем построим вершину B, отложив на прямой CD отрезок $DB = CD$. В результате решения получим треугольник ABC (рис. 174, в).

<u>Задачу 31</u> рекомендуется решить в классе. Если она будет задана на дом, то надо дать указание: решение начать с построения окружности.

Дано:



Построить треугольник



1) 2) 3) 4)

Рис. 175

<u>Решение</u> видно из последовательности рисунков (рис. 175). Треугольники ABC, A_1BC, AB_1C и A_1B_1C — искомые. А так как эти треугольники равны, то говорят, что задача имеет единственное решение с точностью до расположения. Разное расположение получается в силу того, что в данном случае две окружности пересекаются в двух точках. В классе полезно *<u>доказать</u>* равенство двух треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

Решение <u>задач 36 и 37</u> видно из последовательности рисунков (рис. 176). Первые два шага являются решением задач 35, 36.

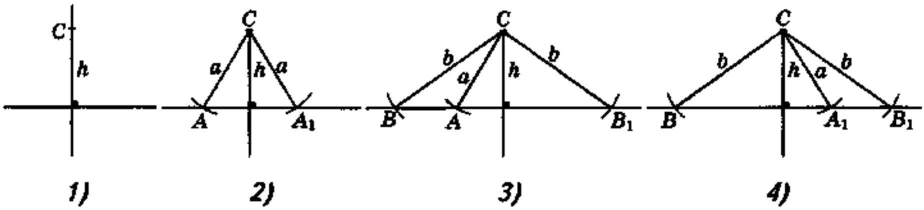


Рис. 176

Для задачи 35 отрезок h является катетом, а отрезок a — гипотенузой.

Для задачи 36 отрезок h является высотой, а отрезок a — боковой стороной.

Треугольники ABC, A_1BC, AB_1C и A_1B_1C — искомые. А так как пары треугольников ABC и A_1B_1C, а также A_1BC и AB_1C равны (полезно провести доказательство равенства треугольников в каждой паре при проверке домашнего задания), то говорят, что задача имеет два решения с точностью до расположения.

Дополнительные задачи

1. Постройте равнобедренный треугольник:

а) по боковой стороне и углу, противоположному основанию;

б) по боковой стороне и углу, прилежащему к основанию;

в) по основанию и боковой стороне;

г) по основанию и медиане, проведенной к основанию.

2. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

3. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон и углу между данными стороной и медианой.

4. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

1. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла.

Ответ. Центр окружности можно взять в любой точке на биссектрисе угла. Радиус равен расстоянию от этой точки до сторон угла.

Геометрическое место точек. Метод геометрических мест

Комментарий для учителя

«Планируемые результаты обучения основного общего образования» в требованиях к геометрической подготовке учащихся формулирует требование к уровню изучения данной темы: «*Выпускник получит возможность научиться решать задач на построение методом геометрического места точек*». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объеме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала решать учителю. При этом урок лучше организовать в форме лекции. Основная цель такого урока — познакомить учащихся с примерами геометрических мест точек.

Текущие результаты изучения пунктов 48 и 49. Учащиеся должны:

– иллюстрировать и объяснять метод геометрического места точек на примерах геометрических мест точек: окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки; серединный, перпендикуляр есть геометрическое местом точек, равноудаленных от двух данных точек; биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла;

– применять при решении задач на построение метод геометрических мест точек.

Методические рекомендации к изучению материала

1) При объяснении термина «геометрическое место точек» (*геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством*) необходимо обратить внимание учащихся на то, что:

1) все точки данной фигуры обладают указанным свойством;

2) если некоторая точка плоскости обладает указанным свойством, то эта точка принадлежит данной фигуре.

Иными словами доказательство того, что «фигура является геометрическим местом точек, обладающих определенным свойством», предполагает проверку двух утверждений:

1) если некоторая точка принадлежит данной фигуре, то она обладает указанным свойством;

2) если некоторая точка на плоскости обладает указанным свойством, то эта точка принадлежит данной фигуре.

2) При доказательстве *теоремы о серединном перпендикуляре* необходимо выделить оба выше указанных этапа:

1. Даны точки A и B. Если некоторая точка C принадлежит серединному перпендикуляру $OC \perp AB$, то она равноудалена от точек A и B.
2. Даны точки A и B. Если некоторая точка D равноудалена от точек A и B, то эта точка принадлежит $OC \perp AB$.

1. Дано: $AO = OB$, $OC \perp AB$.	2. Дано: $AO = OB$, $OC \perp AB$, $DA = DB$.
Доказать: $AC = BC$.	Доказать: $D \in OC$.

Доказательство, приведенное в учебнике, просто и наглядно.

Затем следует решить следующие задачи:

Докажите, что окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки.

Докажите, что биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

Решить задачу 41 из учебника.

После решения этих трех задач следует обратить внимание учащихся на то, что эти задачи вместе с утверждением: «Серединный перпендикуляр есть геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек», составляют

В рабочей тетради следует записать формулировки определения геометрического места точек и теоремы о геометрическом месте точек, равноудаленных от двух данных. Затем на применение определения геометрического места точек выполнить задачи 234–236, которые составляют основу для решения задач на геометрическое место точек и задач на построение.

3) Затем объяснить, в чем же заключается метод геометрических мест. Задача 45, решение которой приведено в тексте учебника, позволяет познакомить учащихся с методом геометрических мест на конкретном примере.

Закрепление материала следует организовать в зависимости от уровня подготовки класса, используя задачи из учебника.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе: изложить весь теоретический материал пункта 48 § 5; разобрать по тексту учебника решение задачи 43, решить задачу 41 из учебника и задачи 1–2 из дополнительных задач; дома— вопрос 15, задачи 42 и 44.

На втором уроке в классе: разобрать решение задачи 44 из домашнего задания; изложить весь теоретический материал пункта 49 § 5; разобрать по тексту учебника решение задачи 45, решить задачи 48 и 51; дома —задачи 46 и 47.

Указания к задачам

Задачу 44 после разбора в классе задачи 43 можно на первом уроке задать на дом с обязательной проверкой на втором уроке.

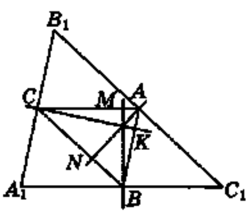


Рис. 177

1) Рассмотрим треугольники ABC и A_1CB: $\angle ACB = \angle CBA_1$ как внутренние накрест лежащие при $A_1C_1 \parallel AC$ и секущей CB (рис. 177). $\angle ABC = \angle A_1CB$ как внутренние накрест лежащие при $A_1B_1 \parallel AB$ и секущей CB. Значит, треугольники ABC и A_1CB:равны по второму признаку. Из равенства треугольников следует $AC = A_1B$, аналогично доказывается, что $AC = BC_1$. Отсюда $AC = A_1B = BC_1$, т.е. точка B — середина стороны A_1C_1. Два других утверждения доказываются аналогично. А поскольку CK, AN и BM — высоты треугольника ABC, то прямые CK, AN и BM — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1C_1B_1$.

2) Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его сторонам. По доказанному в задаче 44 (1) прямые CK, AN и BM — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. А поскольку серединные перпендикуляры пересека-

ются в одной точке, то прямые CK, AN и BM также пересекаются в одной точке.

При решении задачи 46 следует применить теорему о геометрическом месте точек, равноудаленных от двух данных точек. Обозначим: прямая a и точки A и B.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A и B является прямая m, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.

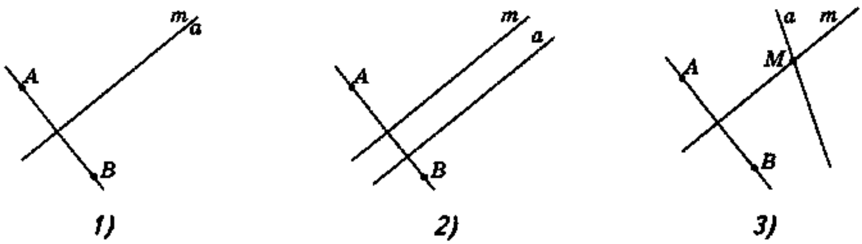


Рис. 178

Исследование. Если прямые a и m совпадают, то любая точка прямой a удовлетворяет условию (рис. 178, 1).

Если прямые a и m параллельны, то задача не имеет решения (рис. 178, 2).

Если прямые a и m пересекаются, то точка их пересечения M и есть искомая точка (рис. 178, 3).

При решении задачи 47, как и в задаче 46, следует применить теорему о геометрическом месте точек, равноудаленных от двух данных точек. Обозначим: точки A, B, C и D.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A и B, является прямая m, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек C и D, является прямая n, перпендикулярная к отрезку CD и проходящая через его середину.

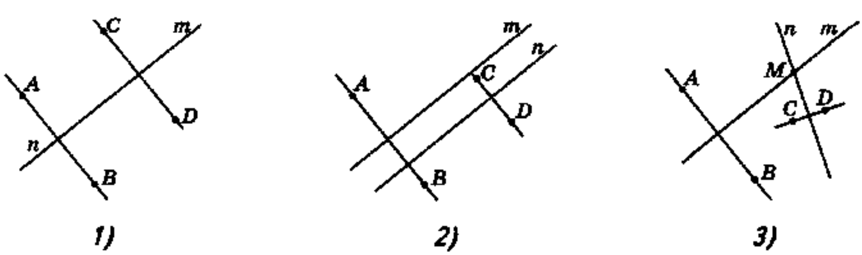


Рис. 179

Исследование. Если прямые n и m совпадают, то любая точка прямой удовлетворяет условию (рис. 179, 1).

Если прямые n и m параллельны, то задача не имеет решения (рис. 179, 2).

Если прямые n и m пересекаются, то точка их пересечения M и есть искомая точка (рис. 179, 3).

Дополнительные задачи

1. Докажите, что окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки.

2. Докажите, что биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

Систематизация и обобщение знаний

Комментарий для учителя

1) В результате систематизации и обобщения знаний за курс седьмого класса учащиеся должны:

– распознавать геометрические фигуры: смежные и вертикальные углы, биссектрису угла, перпендикулярные и параллельные прямые; остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольник, равнобедренные и равносторонние треугольники по указанным элементам; равные треугольники, используя обозначения равных элементов или известные свойства фигур; углы, образованные при пересечении двух прямых секущей;

– изображать геометрические фигуры: смежные и вертикальные углы, биссектрису угла, перпендикулярные и параллельные прямые; остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники, равнобедренные и равносторонние треугольники; равные треугольники; медианы, биссектрисы и высоты треугольника; углы, образованные при пересечении двух прямых секущей;

– выполнять чертежи по условию задач, читать и делать чертежи, необходимые для решения задач, выделять необходимую для решения задачи конфигурацию на чертеже; определить необходимость дополнительных построений при решении задач и выполнять их;

– распознавать взаимное расположение геометрических фигур;

– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

– понимать условие задачи;

– владеть соответствующей терминологией и символикой;

– применяя определения, свойства и признаки фигур и их элементов, отношения фигур, изученные в курсе седьмого класса, находить значения линейных элементов фигур: длины сторон, высот, медиан, биссектрис и периметров треугольников, радиусов, хорд, отрезков касательных к окружности;

– применяя определения, свойства и признаки фигур и их элементов, отношения фигур, изученные в курсе седьмого класса находить градусную меру для углов от 0° до 180°.

2) При подготовке к итоговой контрольной работе следует провести повторение, используя весь оставшийся резерв времени, оставив один урок для разбора решений итоговой работы. Задания для повторения можно брать из учебника, используя либо не решенные в процессе обучения, либо наиболее важные задания каждой темы. Кроме того, учитель может создать свой набор задач для повторения в зависимости от уровня подготовки класса.

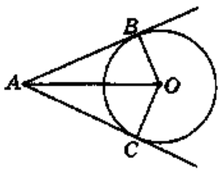
В контрольную работу включены задания с выбором ответа и со свободным ответом, поэтому рекомендуется напомнить учащимся, как надо выполнять такие задания.

При использовании в работе рабочей тетради повторение можно проводить, используя задания из раздела «Систематизация и обобщение знаний» рабочей тетради.

3) В контрольной работе первые семь задач — это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 8 и 9 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

Итоговая (годовая) контрольная работа

Вариант 1

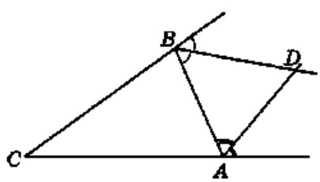


1. Окружность с центром в точке O касается сторон угла A (B и C — точки касания). Расстояние между точками A и O равно 12 см и в два раза больше радиуса окружности. Найдите градусную меру угла A.

Ответ: ____________________

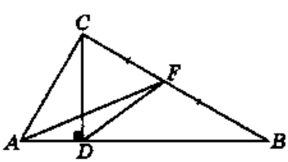
2. Определите вид треугольника, две высоты которого совпадают с его сторонами.

1. прямоугольный треугольник;
2. остроугольный треугольник;
3. тупоугольный треугольник;
4. такого треугольника не существует.



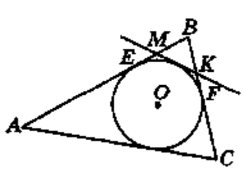
3. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке D. Найдите $\angle BDA$, если $\angle BCA = 39°$.

Ответ: ____________________



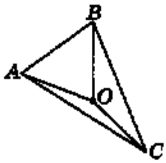
4. В треугольнике ABC проведены медиана AF и высота CD. Найдите DF, если $BC = 10$ см.

1. 5 см; 2. 20 см; 3. 10 см; 4. 15 см.



5. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и BC в точках E и F. Касательная MK к этой окружности пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и K. Найдите периметр треугольника BMK, если $BE = 6$ см.

Ответ: ____________________



6. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Известно, что $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 120°$. Найдите угол B треугольника ABC.

Ответ: ______________________

7. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

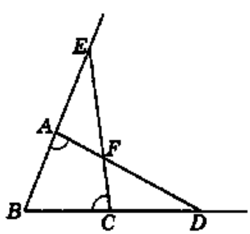
От данного луча отложены $\angle ABC = 56°$ и $\angle ABD = 43°$. Найдите $\angle DBC$.

1. одно; 2. два; 3. три; 4. ни одного.

8. Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

9. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведена высота CD. Докажите, что, если $\angle CBA = 30°$, то $AB : BD = 4 : 1$.

Вариант 2

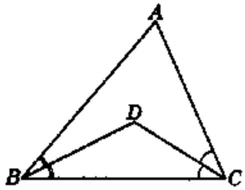


1. На сторонах угла B отложены отрезки BA и BC, длина каждого из которых равна 4 см. Кроме того, на сторонах угла B отмечены точки E и D так, что $\angle BAD = \angle BCE$. Найдите длину BD, если $AE = 5$ см.

Ответ: ______________________

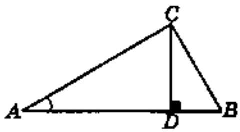
2. Определите вид треугольника, две высоты которого лежат вне треугольника.

1. прямоугольный треугольник;
2. остроугольный треугольник;
3. тупоугольный треугольник;
4. такого треугольника не существует.



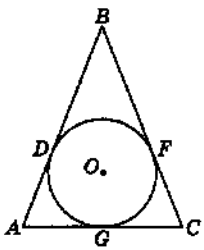
3. В треугольнике ABC угол A равен $122°$. Найдите угол BDC между биссектрисами углов B и C.

Ответ: ____________________



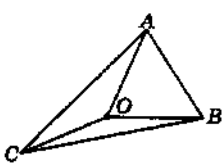
4. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. Найдите гипотенузу AB, если $BC = 6$ см, $BD = 3$ см.

1. 12 см; 2. 6 см; 3. 24 см; 4. 3 см



5. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность, которая касается основания AC в точке G, а боковых сторон — в точках D и F. Найдите периметр треугольника ABC, если $FB = 4$ см, $AG = 2$ см.

1. 8 см; 2. 12 см;
3. 16 см; 4. 20 см.



6. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Известно, что $\angle BOC = 160°$, $\angle COA = 130°$. Найдите угол C треугольника BCA.

Ответ: ____________________

7. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

Периметр равнобедренного треугольника равен 19 см. Одна из его сторон равна 7 см. Найдите длины двух других сторон.

1. одно; 2. два; 3. три; 4. ни одного.

8. Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от его боковых сторон.

9. Из точки B к окружности с центром O проведены две касательные BA и BC. Прямые AC и OB пересекаются в точке D. Определите, под каким углом виден отрезок AB из точки D.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

§ 1. Основные свойства простейших геометрических фигур

№ §§	Тема	число часов	№ урока	задачи	
				в классе	дома
1	Геометрические фигуры	1			1, 2, 3, 4
2	Точка и прямая				
3	Отрезок	2	1	5, 7(1, 2), 14	6, 7(3), 8, 15(2, 3)
4	Измерение отрезков				
5	Полуплоскость		2	9, 10, 13; 17, 18(1)	11, 12, 18(2, 5), 19
6	Полупрямая	1		20, 22	15(1, 4), 18(3, 4), 21
7	Угол	1		24, 25(1)	23, 25(2), 26(1, 2)
8	Основные свойства откладывания отрезков и углов	1		30, 31(1, 2)	27, 28, 29, 31(3)
9	Треугольник	1		36, 38	32, 35, 37, 39, 40
10	Существование треугольника, равного данному				
11	Параллельные прямые	1		41	42
12	Теоремы и доказательства			18(6)	25(3), 26(3, 4), 33, 34, 43
13	Аксиомы				
	Систематизация и обобщение знаний	1			
	Контрольная работа	1			
	Резерв	2			

§ 2. Смежные и вертикальные углы

14	Смежные углы	1		1, 2(1, 3) 3, 4(2) и 5	2(2), 4(1, 3, 4) и 6(2, 3)
15	Вертикальные углы	1		7, 9 и 12	8, 10 и 11.
16	Перпендикулярные прямые	1		15(1, 3), 16(1), 17 и 21(1, 3)	13, 14 15(2), 16(2, 3), 19, 20, и 21(2)
17	Доказательство от противного				
18	Биссектриса угла				
	Систематизация и обобщение знаний	1			
	Контрольная работа	1			
	Резерв	1			

§ 3. Признаки равенства треугольников

20	Первый признак равенства треугольников	3	1	1	2, 3, 4
			2		5, 6, 8
22	Второй признак равенства треугольников		3	7	
23	Равнобедренный треугольник	2	1	9, 10	11, 13, 15
24	Обратная теорема		2	12, 14, 16	17, 18
25	Высота, биссектриса и медиана треугольника	2	1	27, 28	19, 22, 25
26	Свойство медианы равнобедренного треугольника		2	20(1), 21(1), 23, 26	20(2), 21(2), 24

27	Третий признак равенства треугольников	1		29, 30	31, 33
	Систематизация и обобщение знаний	1		35, 36, 39, 40	34, 37, 38
	Контрольная работа	1			
	Резерв	5			

§ 4. Сумма углов треугольника

29	Параллельность прямых	1		1	3, 4
30	Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей				
31	Признаки параллельности прямых	1		8	9, 11
32	Свойство углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей	2	1		12, 14, 17
			2		13, 15, 16
33	Сумма углов треугольника	3	1	18 (1, 4), 19 (1, 3), 20 (2), 30	21, 22 (1, 3), 23 (1, 2), 26
34	Внешний угол треугольника		2	33, 35, 39	32, 34, 36
			3	27 (1, 3), 28, 40	24, 25, 27 (2)
35	Прямоугольный треугольник	2	1	43	41(1, 2), 42, 44
			2	47, 48	45, 46
36	Существование и единственность перпендикуляра к прямой	1		50	48, 49, 51

	Систематизация и обобщение знаний	1		2, 10, 18 (2), 19 (2), 20 (1), 22 (2), 31, 37, 38	18 (3), 19 (4), 20 (1), 23 (3), 27 (2)
	Контрольная работа	1			
	Резерв	3			

§ 5. Геометрические построения

38	Окружность	3	1	1, 3, 6, 14 (1)	4, 5
39	Окружность, описанная около треугольника				
40	Касательная к окружности		2	7, 9	10, 16 (1, 2), 17
41	Окружность, вписанная в треугольник		3	2, 8 (2), 13 (1, 2), 14 (1, 2)	11, 12, 15(1, 2, 3)
42	Задачи на построение	4	1	20 (1), 21	20 (2, 3), 22
43	Построение треугольника с данными сторонами				
44	Построение угла, равного данному		2	22, 23 (1 а; 2 б) и 24 (2)	23 (1 б; 2 а), 24 (1)
45	Построение биссектрисы угла		3	28, 29, 31	26, 27, 30, 32
46	Деление отрезка пополам				
47	Построение перпендикулярной прямой		4	33, 35, 39	34, 36, 37
48	Геометрическое место точек	2		41, 43	42, 44

49	Метод геометрических мест			44, 45	46, 47
	Резерв	2			

Заключительное повторение

	Систематизация и обобщение знаний	2		На усмотрение учителя, в зависимости от уровня подготовки класса
	Контрольная работа	1		
	Резерв	5		

Справочное издание

Мищенко Татьяна Михайловна

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

7 класс

к учебнику А. В. Погорелова
«Геометрия. 7–9 классы»

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 16466 от 25.03.2013 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректор *Н. Е. Жданова*
Дизайн обложки *А. А. Козлова*
Компьютерная верстка *А. П. Юскова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «Красногорская типография»
143405, Московская обл., г. Красногорск, Коммунальный кв-л, д. 2.
www.ktprint.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).

УВАЖАЕМЫЕ ПОКУПАТЕЛИ!

Книги издательства **ЭКЗАМЕН** можно приобрести
оптом и в розницу в следующих книготорговых организациях:

Москва
ИП Степанов — Тел. 8-926-132-22-35
Луна — Тел. 8-916-145-70-06; (495) 688-59-16
ТД Библио-Глобус – Тел. (495) 781-19-00
Молодая гвардия – Тел. (499) 238-00-32
Дом книги Медведково – Тел. (499) 476-16-90
Дом книги на Ладожской – Тел. (499) 267-03-02
Шаг к пятерке – Тел. (495) 728-33-09; 346-00-10
Сеть магазинов Мир школьника

Санкт-Петербург
Коллибри – Тел. (812) 703-59-96
Буквоед – Тел. (812) 346-53-27
Век Развития – Тел. (812) 924-04-58
Тандем – Тел. (812) 702-72-94
Виктория – Тел. (812) 516-58-11
Санкт-Петербургский дом книги – Тел. (812) 448-23-57

Архангельск
АВФ-книга – Тел. (8182) 65-41-34

Благовещенск
Калугин – Тел. (4162) 35-25-43

Брянск
Буква – Тел. (4832) 67-68-92
ИП Трубко – Тел. (4832) 59-59-39

Волгоград
Кассандра – Тел. (8442) 97-55-55

Владивосток
Приморский торговый дом книги – Тел. (4232) 63-73-18

Воронеж
Амиталь – Тел. (4732) 26-77-77
Риокса – Тел. (4732) 21-08-66

Екатеринбург
ТЦ Люмна – Тел. (343) 344-40-60
Дом книги – Тел. (343) 253-50-10
Алис – Тел. (343) 255-10-06

Ессентуки
ЧП Зинченко – Тел. (87961) 5-11-28

Иркутск
ПродалитЪ – Тел. (3952) 24-17-77
Магазин Светлана – Тел. (3952) 24-20-95

Казань
Аист-Пресс – Тел. (8435) 25-55-40
Таис – Тел. (8432) 72-34-55

Краснодар
Когорта – Тел. (8612) 62-54-97
ОИПЦ Перспективы образования – Тел. (8612) 54-25-67

Красноярск
Градъ – Тел. (3912) 26-91-45

Кострома
Леонардо – Тел. (4942) 31-53-76

Курск
Оптимист – Тел. (4712) 35-16-51

Ленинск-Кузнецкий
Кругозор – Тел. (38456) 3-40-10

Мурманск
Тезей – Тел. (8152) 43-63-75

Нижний Новгород
Учебная книга – Тел. (8312) 40-32-13
Пароль – Тел. (8312) 43-02-12
Дирижабль – Тел. (8312) 34-03-05
Школяр – Тел. (8312) 41-92-27

Нижневартовск
Учебная книга – Тел. (3466) 40-71-23

Новокузнецк
Книжный магазин Планета – Тел. (3843) 70-35-83

Новосибирск
Сибверк – Тел. (3832) 12-50-90
Библионик – Тел. (3833) 36-46-01

Омск
Форсаж – Тел. (3812) 53-89-67

Оренбург
Фолиант – Тел. (3532) 77-25-52

Пенза
Апогей – Тел. (8412) 68-14-21
Лексикон – Тел. (8412) 68-03-79
Учколлектор – (8412) 95-54-59

Пермь
Азбука – Тел. (3422) 41-11-35
Тигр – Тел. (3422) 45-24-37

Петропавловск-Камчатский
Новая книга – Тел. (4152) 11-12-60

Прокопьевск
Книжный дом – Тел. (38466) 2-02-95

Пятигорск
ИП Лобанова – Тел. (8793) 98-79-87
Твоя книга – Тел. (8793) 39-02-53

Ростов-на-Дону
Фаэтон-пресс – Тел. (8632) 40-74-88
ИП Ермолаев – Тел. (8632) 99-36-45
Магистр – Тел. (8632) 99-98-96

Рязань
ТД Просвещение – Тел. (4912) 44-67-75
ТД Барс – Тел. (4912) 93-29-54

Самара
Чакона – Тел. (846) 231-22-33,
Метида – Тел. (846) 269-17-17

Саратов
Гемера – Тел. (8452) 64-37-37
Полиграфист – Тел. (8452) 29-67-20
Стрелец и К – Тел. (8452) 52-25-24

Смоленск
Кругозор – Тел. (4812) 65-86-65
Учебная книга – Тел. (4812) 38-93-52

Тверь
Книжная лавка – Тел. (4822) 33-93-03

Тула
Система Плюс – Тел. (4872) 70-00-66

Тюмень
Знание – Тел. (3452) 25-23-72

Уссурийск
Сталкер – Тел. (4234) 32-50-19

Улан-Удэ
ПолиНом – Тел. (3012) 44-44-74

Уфа
Эдвис – Тел. (3472) 82-89-65,

Хабаровск
Мирс – Тел. (4212) 26-87-30

Челябинск
Интерсервис ЛТД - Тел. (3512) 47-74-13

Южно-Сахалинск
Весть – Тел. (4242) 43-62-67

Якутск
Книжный маркет – Тел. (4112) 49-12-69
Якутский книжный дом – Тел. (4112) 34-10-12

По вопросам прямых оптовых закупок обращайтесь
по тел. (495) 641-00-30 (многоканальный), sale@examen.biz
www.examen.biz